

O uso das transformações geométricas *através da*¹ resolução de problemas na formação de futuros professores de matemática

The use of geometric transformations through problem solving in the training of future math teachers

Célia Barros Nunes²

Lourdes de la Rosa Onuchic³

Resumo

Este artigo baseia-se numa pesquisa qualitativa, de abordagem descritiva e interpretativa, desenvolvida pela primeira autora que se inseriu no ambiente pesquisado, em uma turma de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Pública, para observar e, ao mesmo tempo, atuar como professora-pesquisadora, a fim de compreender e buscar por mudanças na prática de ensino, bem como conscientizar os sujeitos da pesquisa de seu papel como futuro professor de Matemática. A pesquisa teve como objetivo investigar, compreender e evidenciar as potencialidades didático-matemáticas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática *através da* Resolução de Problemas nos processos de ensinar e aprender Geometria no trato com as transformações geométricas. Pode-se observar pelos dados coletados, que trabalhar transformações geométricas, fazendo uso dessa metodologia na formação de futuros professores, pode ser um potencializador eficaz para o ensino-aprendizagem da Geometria.

Palavras-chave: Transformações geométricas. Formação de professores. Resolução de Problemas, Isometria.

Abstract

This article is based on a qualitative research of descriptive and interpretative approach, developed by the first author that joined the researched environment, in a class of students of a course in Mathematics of a Public University, to observe and, at the same time, act as a teacher-researcher, seeking to

¹ As palavras *através da* no nome dessa metodologia, segundo Onuchic (1999) significa “ao longo de”, em que durante o processo da resolução do problema é construída a matemática nova em que durante o processo da resolução do problema, constroem-se conceitos, conteúdos, algoritmos novos.

² Doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP) de Rio Claro, São Paulo, Pós-doutorado em Didática da Matemática pela Faculdade de Educação em Lisboa, Portugal. Atua no Departamento de Educação, Colegiado de Matemática da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), Campus X. E-mail: celiabns@gmail.com

³ Doutorado em Matemática pelo Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP (1978), São Paulo. Atualmente é professora voluntária da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. E-mail: Ironuchic@gmail.com

comprehend and pursue changes in the teaching practices, as well as to bring awareness to the research subjects about their roles as future Mathematics teachers. The research had as a goal to investigate, comprehend and evidence the mathematical-didactic capabilities of the Methodology of Math Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving in the process of teaching and learning Geometry when it comes to geometrical transformations. It can be observed within the collected data that teaching geometric transformation when using this methodology in the formation of future teachers can be a boost effective to the teaching-learning of Geometry.

Keywords: Geometric transformation. Teacher's formation. Problem Solving. Isometry.

Introdução

De acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais para Licenciatura em Matemática (2001), os cursos de Licenciatura em Matemática têm como objetivo principal a formação de professores para a Educação Básica, o que permite concluir que o aluno que opta por esse tipo de curso deve aprender Matemática com a finalidade de ensiná-la. No que se refere às competências e habilidades próprias do futuro professor de Matemática, o licenciado em Matemática deverá ter capacidade de desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento dos alunos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos.

Assim, o presente texto tem o propósito de contribuir, efetivamente, com a formação inicial de professores de Matemática, ao lhes apresentar e propor uma metodologia de trabalho em sala de aula para ensinar e aprender Geometria, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática *através da* Resolução de Problemas, segundo Onuchic (2013).

Inicialmente buscaremos uma breve discussão teórica relacionada ao que outros pesquisadores pensam sobre Geometria e seu ensino-aprendizagem na formação inicial de professores de Matemática, sobre as Transformações Geométricas, especificamente as Isometrias, e sobre Resolução de Problemas. Depois, descreveremos os procedimentos metodológicos desenvolvidos na pesquisa. Em continuação, relataremos e discutiremos episódios ocorridos em sala de aula onde foram trabalhados

problemas geométricos, com foco nas transformações geométricas, tecendo, por fim, algumas considerações relacionadas a esta pesquisa.

Breve discussão teórica sobre a Geometria e seu ensino-aprendizagem na formação inicial do professor de matemática

A principal tarefa da Educação Matemática tem sido a de contribuir, significativamente, para a melhoria das práticas dos professores no que se refere ao ensino e à aprendizagem da Matemática. De uma maneira mais ampla pode-se dizer que sua essência está na Matemática e, a partir daí, surgem estudos sobre a importância de seu ensino: o que é importante ensinar nos vários níveis (conteúdos no currículo); como ensiná-la; como vê-la num contexto histórico-sócio-cultural; que materiais instrucionais são adequados ao processo de ensino-aprendizagem. Atrelada a essa ideia, D'Amore (2007, p. 97), nos diz que “a Educação Matemática se apresenta como um sistema social complexo e heterogêneo, que inclui teoria, desenvolvimento e prática relativos ao ensino e à aprendizagem da Matemática”.

Como nesse contexto estão inseridos os professores, é necessário que eles estejam bem preparados, com um sólido conhecimento tanto em Matemática quanto em Didática. A Didática, entre outras funções, deve preparar os futuros professores metodologicamente para sua prática letiva futura ao lhes proporcionar estratégias úteis de ensino, bem como analisar os fenômenos educativos que ocorrem no processo de ensino-aprendizagem proporcionando-lhes ferramentas fundamentais que o professor usa em sua prática profissional.

Concordamos com Onuchic (1999) quando diz que nenhuma intervenção no processo de aprendizagem pode fazer mais diferença do que um professor bem formado, consciente e hábil. Sua preparação e seu desempenho têm um efeito direto no crescimento dos alunos, pois ninguém tem tanta influência sobre os alunos quanto os próprios professores.

Os cursos de Licenciatura em Matemática têm um papel crucial na formação do futuro professor. Eles têm como propósito central formar professores de Matemática para atuarem na Educação Básica. As Diretrizes

Curriculares Nacionais para Licenciatura em Matemática (BRASIL, 2001) indicam com clareza os conteúdos bem como a distribuição dos mesmos. Ainda, segundo esse documento, na parte comum do currículo deve-se contemplar conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise. Essas três áreas possuem seu espaço na Matemática e é possível perceber que não necessariamente precisam estar desvinculadas uma da outra. A compreensão dessa integração é de fundamental importância no processo de ensino e de aprendizagem pois, além de facilitar a percepção de significados e conceitos, “valoriza a semelhança, permite um olhar mais atento para a desfragmentação permitindo melhor entendimento da ideia fundamental do estudo, o que não significa que se desvalorize a singularidade e a especificidade de cada campo da Matemática” (ROSA, 2016, p. 3)

A Geometria é um importante campo da Matemática e está presente, a partir dos conceitos que a constitui, em nosso cotidiano de inúmeras e diferentes formas. Ela tem sido amplamente considerada, no currículo da matemática escolar, como um lugar onde os alunos aprendem a raciocinar e a ver a estrutura axiomática da Matemática. O padrão Geometria, apresentado pelos Princípios e Padrões para a Matemática Escolar (NCTM, 2000), inclui forte foco no desenvolvimento do raciocínio e prova, usando definições e estabelecendo fatos.

Os PCNs (BRASIL; 1998, 2001), por sua vez, enfatizam a importância do ensino de Geometria, nos currículos escolares, quando justificam sua relevância no que se refere ao trabalho em que as noções geométricas contribuem para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças e identificar regularidades.

Apesar da relevância do conhecimento de Geometria, várias pesquisas, como as de Almouloud et al. (2004); Barrantes e Blanco (2006); Guimarães, Vasconcellos e Teixeira (2006); Nacaratto e Passos (2003), visando investigar como se encontram o ensino e a aprendizagem de Geometria, nas escolas de Ensino Básico, revelam que esse ramo da Matemática é, muitas vezes, pouco trabalhado com os alunos devido a uma má formação que alguns professores

tiveram em relação ao conhecimento dos conteúdos dessa disciplina. Almouloud et al (2004) justificam essa formação precária dos professores, dizendo que os cursos de formação inicial não têm contribuído para que futuros professores possam refletir mais profundamente a esse respeito. Guimarães, Vasconcellos e Teixeira (2006, p. 97) complementam afirmando que “nesse modelo de formação de professores há também uma precariedade na formação tanto específica quanto didática para o ensino de Geometria nas séries iniciais”.

Nacaratto e Passos (2003) dizem que o futuro professor deveria ter oportunidade de vivenciar situações da prática pedagógica que pudessem contribuir para a formação do seu próprio pensamento geométrico. Ressaltam essas autoras, ainda, que muitos professores, em seus depoimentos, admitem não terem vivenciado um ensino de Geometria capaz de lhes permitir pensar geometricamente e que suas experiências com o ensino de Geometria reduzem-se à Geometria Métrica e ao reconhecimento de figuras geométricas sem, no entanto, chegar a distinguir nem mesmo os aspectos figurais dos conceitos.

Boa parte dos professores, quando questionados a respeito do ensino de Geometria, solicitam cursos de extensão que priorizem reflexões de suas práticas pedagógicas, pois não se sentem preparados para trabalhar segundo as recomendações e orientações didáticas e pedagógicas dos documentos curriculares. Possivelmente, falta-lhes clareza sobre como ensinar Geometria e/ou acerca de habilidades que possam ser desenvolvidas nesse nível básico de ensino.

Almouloud et al (2004) apontaram para a necessidade de revisão dos modelos de cursos de formação de professores para a efetiva implantação de novas alternativas que complementam tais diagnósticos e provocam discussões a respeito do quê, de como e de quando ensinar determinado conteúdo. Além da formação insuficiente, que futuros professores de Matemática recebem em Geometria, percebe-se também que os cursos de formação continuada não estão atendendo aos objetivos em relação a esse ramo da Matemática.

Diante desse breve estudo podemos constatar que as dificuldades encontradas nos professores em relação ao ensino e à aprendizagem da Geometria revelam-se não apenas na má formação que tiveram durante sua formação acadêmica mas, também, durante toda sua escolaridade, seja no Ensino Fundamental ou no Médio. Cabe aqui um alerta para que os cursos de formação repensem seu modelo curricular, pois “o modelo de formação do professor é um passo indispensável para a melhoria da qualidade do ensino de forma geral e do ensino da Geometria em particular” (GUIMARÃES; VASCONCELOS; TEIXEIRA, 2006, p.104).

A Geometria das Transformações

Desde o final da década de 70, do século XX, pesquisadores começaram a se mobilizar com vistas a se pensar no resgate do ensino da Geometria. Novas propostas curriculares, principalmente a do estado de São Paulo, na década de 90, buscavam soluções para um ensino mais eficiente da Geometria. Entretanto, somente do fim do século XX para o início do século XXI é que o ensino da Geometria ganhou um novo impulso. Diversos são os estudos e pesquisas que vêm sendo feitas no sentido de revitalizá-la, emergindo, então, novas tendências didático-pedagógicas como a Geometria Experimental – tida como a geometria baseada na experimentação e na ação humana – e a Geometria Dinâmica, entendida como o estudo da Geometria através do movimento de figuras geométricas como, por exemplo, a Geometria das Transformações e a Geometria em ambientes computacionais. Essas duas novas tendências revelam uma abordagem mais exploratória, como ressaltam Andrade e Nacarato (s/d, p.15)

[...] o ensino de Geometria vem se pautando em uma abordagem mais exploratória em que o aspecto experimental e teórico do pensamento geométrico são abordados, quer na utilização de diferentes mídias, quer em contextos de aulas mais dialogadas com produção, negociação de significados, quer na utilização de softwares de geometria dinâmica. Mas esses contextos não prescindem da importância dos processos de validação, visto ser significativo o número de trabalhos que vêm discutindo o papel das provas e argumentações no ensino de Geometria, além de uma preocupação mais recente com discussões de aspectos epistemológicos como a visualização e a representação em geometria (ANDRADE; NACARATO, s/d, p. 15).

Andrade (1998), em sua pesquisa de mestrado, ao realizar o retrato do estado da arte sobre a produção brasileira em Geometria, tomando como objeto de estudo os anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEMs), no período de 1987 a 2001, constatou que os trabalhos com a utilização de Geometria Dinâmica também revelam uma tendência didático-pedagógica convergente com os trabalhos da Geometria Experimental, como a confrontação de resultados na construção de determinados conceitos incluindo processos de validação e argumentação geométrica. Esses processos, pautados em características exploratórias, envolvem diferentes mídias, sendo uma delas o computador. Esse autor observou que, nesses trabalhos, a característica exploratória desses ambientes está sempre apoiada em referenciais teóricos que procuram discutir o desenvolvimento do pensamento geométrico e suas formas de representação.

Ponte (2006) aponta, também, a importância de se estudar os conceitos e os objetos geométricos do ponto de vista experimental e indutivo, de explorar a aplicação da Geometria a situações da vida real e de utilizar diagramas e modelos concretos na construção conceitual em Geometria. Como um caminho para isso ele propõe a utilização de programas de Geometria Dinâmica.

De fato, um trabalho em geometria escolar pautado em atividades experimentais e exploratórias, com materiais manipulativos é válido. Entretanto, deve-se ter o cuidado de não priorizar demasiadamente a experimentação. É fundamental, no ensino de Geometria, que se caracterize também o conhecimento matemático, especificamente o de Geometria trabalhando com conceitos, propriedades geométricas, por exemplo, demonstrações. “Uma abordagem tanto dedutiva quanto experimental é importante no ensino de Geometria sem a prioridade de uma sobre a outra” (NUNES, 2010).

Segundo Van de Walle e Lovin (2006, p.79), “o ensino que se quer da Geometria está fundamentado em quatro grandes ideias que, ao invés de prestigiar repetições ou formas de memorização, são responsáveis pelo pensar e pela compreensão da Geometria trabalhada”. São elas:

1. *Formas e Propriedades*: O que torna as formas iguais ou diferentes pode ser determinado por um conjunto de propriedades geométricas. Por exemplo, as formas têm lados que são paralelos, perpendiculares ou nenhuma dos dois; elas têm simetria reflexiva, simetria rotacional, ou nenhuma das duas; elas são semelhantes, congruentes, ou nenhuma das duas.
2. *Transformações*: As formas podem ser movidas no plano ou no espaço. Essas mudanças podem ser descritas em termo de translações, reflexões e rotações.
3. *Localização*: As formas podem ser descritas em termos de sua localização no plano ou no espaço. Sistemas coordenados podem ser usados para descrever essas localizações precisamente. Por sua vez, a visão coordenada da forma oferece um outro modo de compreender suas propriedades, mudança de posição, transformações e como elas aparecem ou mudam de tamanho.
4. *Visualização*: As formas podem ser vistas sob diferentes perspectivas. A habilidade em perceber as formas de diferentes pontos de vista ajuda-nos a compreender as relações entre figuras bi e tridimensionais e mentalmente mudar a posição e o tamanho das formas.

Tomando como referência a segunda ideia apresentada por Van de Walle e Lovin, as professoras e pesquisadoras Nasser e Tinoco (2004), em busca de uma revitalização do ensino da Geometria nas escolas, realizaram um trabalho de Geometria numa abordagem intuitiva e dinâmica, por meio das transformações geométricas, no sentido de incentivar os alunos a manipular e construir figuras e sólidos geométricos, e levá-los a perceber que os objetos geométricos podem ocupar diversas posições sem alterar suas características. Além disso, as autoras supra citadas defendem um trabalho em Geometria Dinâmica com o uso de softwares específicos para a Geometria, alertando, contudo, que essa questão não é a mais importante e afirmam

O importante é que, com ou sem computador, você pode e deve desenvolver a Geometria em sua sala de aula seguindo o enfoque dinâmico. [...] As experiências de manipulação devem ser mantidas, pois as atividades no computador não podem substituí-las, mas apenas complementá-las (NASSER e TINOCO, 2006, p. viii).

Reconhecem elas que o enfoque dado por Euclides à Geometria ainda pode ser ensinado nos dias de hoje, bastando que a abordagem deixe de ser estática e passe a ser dinâmica e experimental, em que os alunos são motivados a verificar a veracidade de uma afirmativa, e que essa verificação esteja ao seu alcance, através de atividades desenvolvidas com material apropriado.

De fato, trabalhar Geometria, numa abordagem intuitiva e dinâmica por meio das transformações geométricas, poderá ser uma ferramenta útil na exploração de conceitos fundamentais da Geometria como, por exemplo, a Congruência e a Semelhança de Triângulos.

Movimentação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos e das áreas da superfície) é também uma recomendação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), ao incluírem-nas entre os Conceitos e Procedimentos para a área de Espaço e Forma no 3.º Ciclo do Ensino Fundamental. Justificam que as transformações geométricas, por constituírem um campo rico de conexões, são uma ferramenta útil para demonstrações, para resolver problemas e, de uma maneira geral, para raciocinar sobre o plano e o espaço.

A palavra *transformação* significa “*mudança*”. Portanto, ao falarmos em *transformação geométrica* estamos nos referindo a mudanças em figuras geométricas. Em uma transformação geométrica, cada ponto da figura inicial é levado a um ponto da figura em que ela é transformada.

Assim, uma transformação geométrica no plano é uma função, cujo domínio é um conjunto de pontos do plano e cujo contradomínio também é um conjunto de pontos do plano. Uma definição matemática mais precisa pode-se encontrar em Veloso (2012, p.) quando diz que

Uma transformação geométrica T é uma correspondência que associa a cada ponto P de \mathbb{R}^2 um e um só ponto P' de \mathbb{R}^2 , verificando as seguintes condições: a) Se P e Q são dois pontos distintos, então os pontos correspondentes P' e Q' são também distintos; b) Se U é um ponto qualquer de \mathbb{R}^2 , então existe um ponto V em \mathbb{R}^2 tal que seu correpondente pela transformação geométrica T é U .

Diante do exposto, percebe-se que é imprescindível o ensino de Geometria na formação geral dos estudantes. Cumpre ressaltar aqui que se faz necessária “a implementação efetiva de propostas de ensino que estimulem o aluno a progredir em sua capacidade de estabelecer pontos de referência em seu entorno desde o primeiro ciclo do Ensino Fundamental” (NACARATO e PASSOS, 2003, p.31).

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

O futuro professor deveria ter a oportunidade de vivenciar situações da prática pedagógica que pudessem contribuir para a formação do seu próprio pensamento geométrico (NACARATO; PASSOS, 2003). Tomando como base as palavras dessas autoras, acreditamos que a resolução de problemas é uma ferramenta útil para se ensinar e aprender Matemática e, em particular, Geometria. Nessa perspectiva, indicamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas como uma proposta didática para se trabalhar, em sala de aula, a Geometria. Num trabalho a ser feito em sala de aula, parte-se sempre de um problema, tendo como objetivo um foco particular de Matemática e, usando estratégias convenientes, busca-se a solução do problema, com a participação dos alunos, em grupos, tendo eles como co-construtores do novo conhecimento pretendido para aquela aula.

Consideramos aqui o termo *problema*, segundo a concepção de Onuchic (1999, p. 215): “Como tudo aquilo que não sei fazer, mas estou interessado em fazer”. Para reforçar essa concepção, Nunes (2010) acrescenta que o problema deve ser acessível ao resolvidor e, para tal, torna-se imprescindível que o aluno

[...] tenha um conhecimento prévio de conteúdos matemáticos necessários para chegar à sua solução; que se sinta motivado para resolvê-lo; e que o problema facilite o desenvolvimento de sua intuição e criatividade, levando-o a exercitar o seu pensar matemático. Nessas condições, podemos predizer um favorecimento na aquisição da aprendizagem (NUNES, 2010, p. 77).

Não há dúvida de que o interesse ou o envolvimento dos alunos em um problema é importante. Sendo assim, sua escolha deve ser bem pensada e

planejada pelo professor. O problema deve ser desafiador o suficiente para manter o aluno envolvido, mas não tão difícil a ponto de desencorajá-lo, pois, o problema, nessa metodologia, deve ser *gerador* de novos conceitos e conteúdos matemáticos que o professor planejou para serem construídos naquela aula.

É papel do professor fazer a intermediação no sentido de levar os alunos a pensar, dando-lhes tempo para tal e incentivando a troca de ideias entre eles. É necessário que os atenda em suas dificuldades – problemas secundários que tratam de dúvidas apresentadas pelos alunos no contexto do vocabulário presente no enunciado; no contexto da leitura e da interpretação; além daqueles que podem surgir por ocasião da resolução do problema: notação, passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática, conceitos relacionados, técnicas operatórias, a fim de possibilitar a continuação do trabalho. Depois de realizada a plenária, momento mais rico nessa metodologia, e de se chegar a um consenso, busca-se formalizar o conteúdo pretendido para aquela aula, tarefa exclusiva do professor com a participação ativa dos alunos. Ele faz uma apresentação formal dos novos conceitos e conteúdos construídos, destacando as diferentes técnicas operatórias e as propriedades qualificadas para o assunto.

Adotada essa metodologia para se trabalhar em sala de aula, é importante que, diante dela, o professor, ao escolher as situações-problema para suas aulas, se questione a respeito de sua prática. A esse respeito, disse Marincek (2001, p.16) “para garantir que os alunos construam um conhecimento adequado de Matemática, contextualizado, que faça sentido, é necessário que o professor reflita, investigue e venha a formular ou escolher cuidadosamente os problemas que irá propor”.

A avaliação, nessa metodologia, deve constituir uma parte integrante do processo de ensino e de aprendizagem. Deve ser vista como um processo contínuo e dinâmico de aprendizagem, o qual deve permitir que o aluno seja um elemento ativo, reflexivo e responsável por sua aprendizagem.

Reforçamos essas ideias nas palavras de Allevato e Onuchic (2008, p.2)

[...] No processo de ensino e de aprendizagem através da exploração de um problema, entender as hipóteses do problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações entre suas variáveis, saber

comunicar resultados e ser capaz de avaliar criticamente técnicas e concepções utilizadas na resolução do mesmo são aspectos que devem estar presentes ou serem estimulados.

Metodologia e procedimentos metodológicos

O trabalho neste artigo é parte de uma pesquisa mais ampla, (NUNES, 2010), desenvolvida como uma pesquisa qualitativa, descritiva e analítica, segundo Bogdan e Biklen (1991), fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Na aplicação dessa metodologia em sala de aula, o problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem levando à construção de conhecimento novo.

Esse trabalho desenvolvido na disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II teve por objetivos explorar, investigar, construir, experimentar, conjecturar, generalizar e formalizar determinados conceitos de Geometria Plana, apoiado numa abordagem dinâmica da Geometria das Transformações - o estudo das Isometrias, que exige uma participação mais ativa dos alunos, desde o momento dos experimentos e observações até a generalização de novos conceitos geométricos.

Os procedimentos metodológicos utilizados foram a observação participante, o uso de materiais manipuláveis, as produções escritas pelos alunos, questionários, filmagens, gravações em vídeo e diário de campo. As tarefas foram adaptadas a trabalhos de Nasser e Tinoco (2004) e todas trabalhadas na perspectiva de Metodologia em Resolução de Problemas.

Nesse contexto estiveram a pesquisadora, como professora, que pôde observar o ambiente pesquisado e intervir a fim de compreendê-lo e, sobretudo, tentar modificá-lo em direções que permitissem a melhora da sua prática de ensino. Os alunos, de uma turma do 4º semestre do curso de Licenciatura em Matemática, composta por 14 alunos, de um Universidade do Estado da Bahia, Era uma turma heterogênea, numa faixa etária de 20 a 55 anos, e em sua maioria, era constituída de homens (oito).

Vale ressaltar que essa turma foi escolhida para participar da pesquisa porque já tinha estudado os componentes curriculares Geometria Plana e

Geometria Espacial, dentro do currículo escolar. No entanto, não tinham conhecimento da Geometria das Transformações.

Análise e discussão de episódios ocorridos em sala de aula

No intuito de ajudar os futuros professores, participantes da pesquisa, a consolidar e organizar seus conhecimentos básicos de Geometria e sanar suas dificuldades, foram abordados e desenvolvidos, durante os encontros, tópicos relevantes da Geometria: a Formação de Conceitos Geométricos, a Visão Dinâmica da Congruência de Figuras Geométricas e, também, uma Visão Dinâmica da Semelhança de Figuras Geométricas. Tais tópicos foram escolhidos de modo que os futuros professores de Matemática pudessem ter contato direto com o material concreto (alguns até construídos por eles mesmos) como base para uma exploração mais abstrata de como esses conceitos poderiam ser trabalhados por meio de experimentações, levantamento de conjecturas e até demonstrações, numa visão dinâmica, por meio das transformações geométricas.

Destaque aqui que toda análise e discussão dos episódios foi feita seguindo as orientações da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, de acordo com Onuchic (2013): (i) apresentar o problema aos alunos; (ii) os alunos em seus grupos, lêem o problema, buscando compreendê-lo; (iii) os alunos buscam resolver o problema com o apoio, a orientação e mediação do professor, (iv) os alunos apresentam suas resoluções na lousa; (v) e, em plenária, argumentam, discutem suas ideias em (vi) busca de um consenso sobre o processo de resolução, por fim (vii) professor formaliza o conteúdo que se pretendia para aquela aula e propõe novos problemas.

A seguir são apresentados dois episódios de sala de aula em que foram trabalhados problemas geométricos e feitas suas respectivas discussão e análise.

1º episódio – Problemas geradores do conceito de Isometria

1) Desenhe uma figura bem simples num papel transparente e trace nele uma reta que não corte a figura. Dobre o papel sobre essa reta de modo que a figura e a reta fiquem do lado externo. Use a transparência do papel para copiar a figura que você vê. Abra a folha. Você acabou de obter duas figuras, uma de cada lado da reta, como se a reta fosse um espelho.

Agora responda:

- i) O que você observa, comparando a figura original com a que você desenhou por último?
- ii) Qualquer que seja a figura de partida, vai acontecer o mesmo?
- iii) Considerando a mesma figura, o que acontece se você mudar a posição da reta?

2) Desenhe uma figura. Trace uma reta passando por um ponto A do seu contorno e marque um outro ponto B sobre a reta e fora da figura. Essa reta pode cortar a figura em dois ou mais pontos, ou tocá-la em apenas um ponto. Usando papel transparente, copie a figura e arraste-a paralelamente à reta traçada, de modo que o ponto A se mantenha sobre a reta, até que atinja a posição do ponto B. Observe que se o ponto B não estiver suficientemente afastado do ponto A, as figuras poderão se interceptar. Escolha um ponto B conveniente, de modo que isso não aconteça.

Compare as duas figuras e responda:

- i) O que você observa, comparando a figura original com a que você desenhou por último?
- ii) Qualquer que seja a figura de partida, vai acontecer o mesmo?
- iii) Considerando a mesma figura, o que acontece se você mudar a posição da reta? E do ponto B?

3) Desenhe uma figura qualquer. Copie a figura numa folha de papel transparente, e mantenha esta folha sobre o papel original, presa a um ponto P qualquer por um alfinete. Observe que o ponto P pode pertencer ao contorno da figura, estar fora dela, ou no seu interior. É aconselhável tentar inicialmente com o ponto P fora da figura. Gire a folha de papel transparente, mantendo fixo o ponto preso pelo alfinete e risque, com força, para obter uma nova figura marcada no papel original.

Compare as duas figuras e responda:

- i) O que você observa, comparando a figura original com a que você desenhou por último?
- ii) Qualquer que seja a figura de partida, vai acontecer o mesmo?
- iii) Considerando a mesma figura, o que acontece se você mudar o sentido do giro, ou o tamanho do giro?

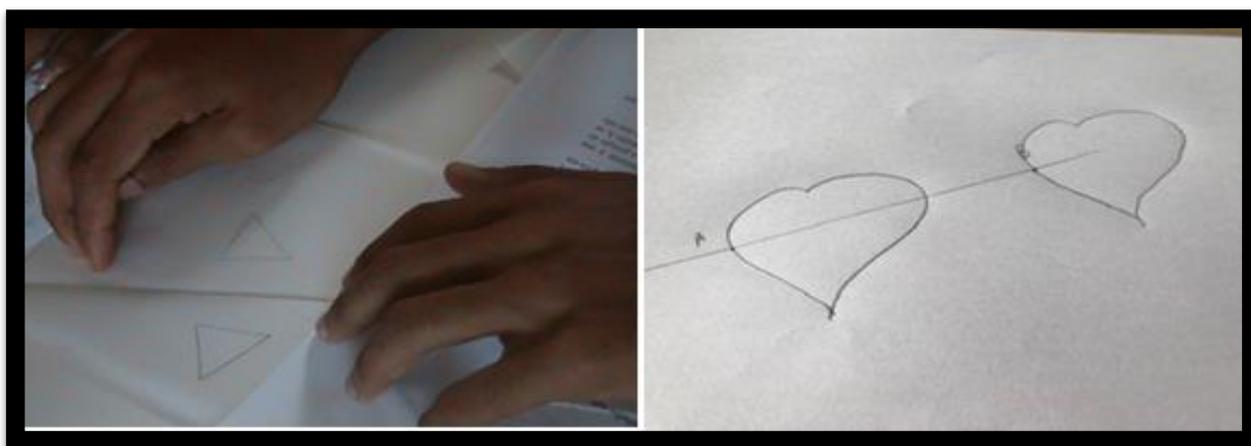
O uso das transformações geométricas *através da* resolução de problemas na formação de futuros professores de matemática

Fonte: NASSER & TINOCO (2004).

O que se pretendia com esses problemas era trabalhar o movimento das figuras a fim de explorar e construir o conceito de isometrias de uma maneira intuitiva, investigativa e exploratória.

Ao entregar a folha de papel ofício contendo os problemas descritos acima, os alunos se reuniram em pequenos grupos e começaram a trabalhar sobre eles. A professora, numa atitude de observadora e mediadora do trabalho, notou uma certa dificuldade em alguns grupos precisando guiar os alunos para que pudessem responder aos problemas. Essas dificuldades se mostraram na interpretação do enunciado dos problemas e no manuseio de material manipulativo que, ao serem sanadas pela professora, as questões 1, 2 e 3, puderam ser respondidas.

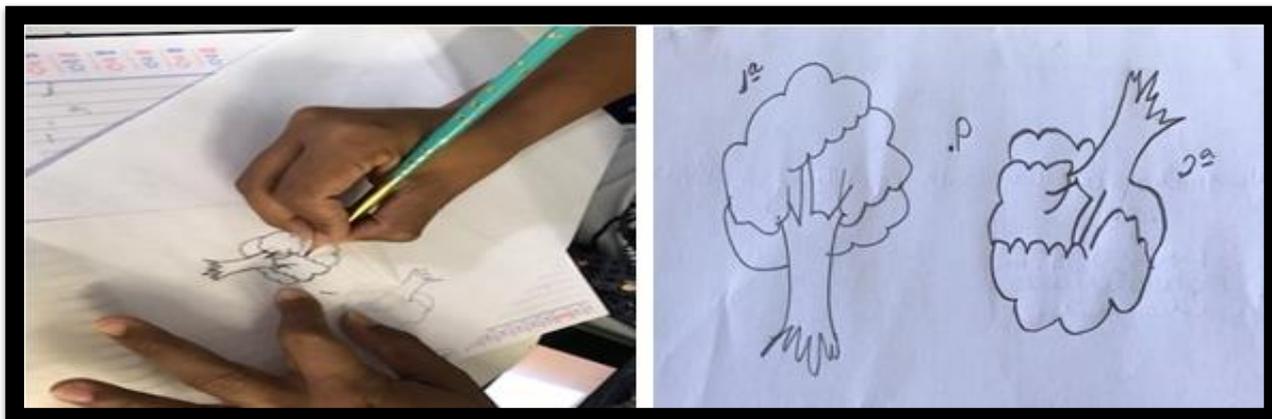
Figura 1 – Problemas 1 e 2 geradores do conceito de isometria



Fonte: Arquivo da pesquisa

Com essas questões, os alunos conseguiram perceber que houve mudança de posição das figuras e que as figuras obtidas eram congruentes. No entanto, não tinham clareza sobre o tipo de movimento que estava acontecendo, nem tampouco qual o conceito que estava por trás dessas questões.

Figura 2 – Problema 3 geradores do conceito de isometria



Fonte: Arquivo da pesquisa

Em relação à figura 2, uma das alunas do grupo, desenhou a figura da árvore, copiou-a em um papel transparente e girou-a por um ângulo de aproximadamente 40° , mantendo fixo o ponto P preso pelo alfinete, obtendo uma nova figura, congruente à original (a segunda imagem da árvore).

Somente depois de toda discussão feita em plenária e de se chegar a um consenso das respostas obtidas, a professora, com a participação ativa dos alunos, formalizou o conteúdo que pretendia para esses problemas.

Pode-se perceber que, no primeiro problema, a figura obtida da original é o seu reflexo e o movimento que permitiu a transformação foi a *reflexão*, enquanto que, no segundo problema, a figura obtida da original deu-se por meio de uma *translação*, ou seja, a figura original foi arrastada segundo uma reta, num mesmo sentido e numa mesma direção. No problema 3, a figura obtida da original deu-se por uma *rotação* segundo um ângulo. Todas as figuras obtidas, a partir da figura original, mostraram-se congruentes, pois, independente do movimento dado a elas, seja por reflexão, por translação ou por rotação foram preservadas as medidas dos seus lados e dos seus ângulos. A essas transformações geométricas sofridas por cada figura chamamos *isometrias*,

Interessante também foi o fato de se usar o papel transparente para esses problemas, pois esse tipo de material, acessível a todos os alunos, possibilitou construir figuras transformadas de outras pelas isometrias e alcançar a compreensão de alguns aspectos importantes como, por exemplo, a

O uso das transformações geométricas *através da* resolução de problemas na formação de futuros professores de matemática

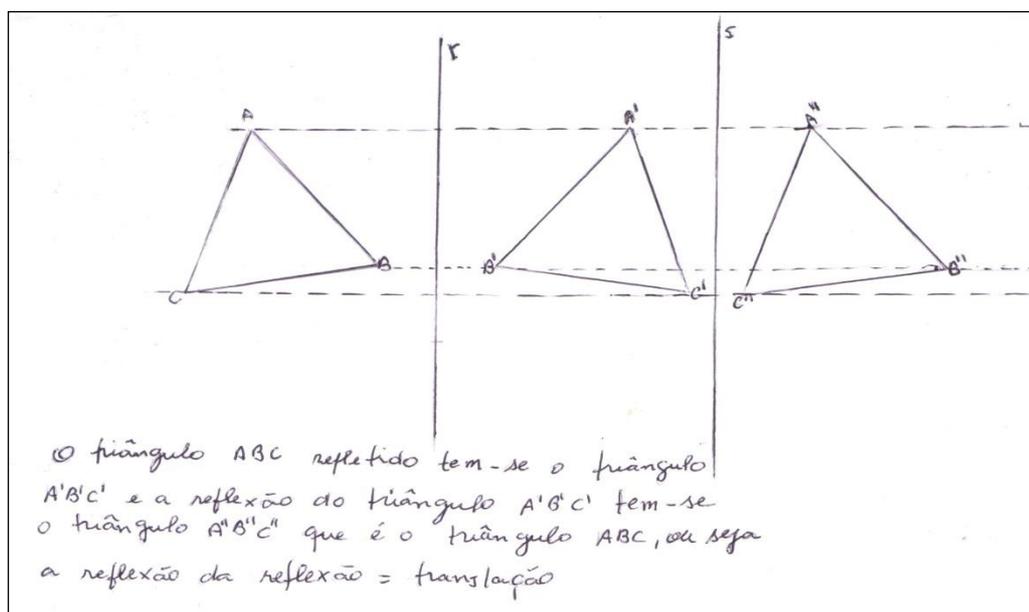
preservação da distância. Outro fato percebido é que a dobragem em folha de papel funcionou na reflexão como um espelho.

Um novo problema, envolvendo reflexão, foi apresentado aos alunos pela professora-pesquisadora e ele dizia:

Construir um triângulo ABC e uma reta r , obtendo como imagem o triângulo $A'B'C'$. Repetir essa operação partindo do triângulo $A'B'C'$ e buscar sua imagem em relação à reta s , paralela à reta r , obtendo o triângulo $A''B''C''$. O que acontece entre esses três triângulos?

Alguns alunos, já familiarizados com o resultado das questões anteriores e das noções de pontos simétricos, puderam apresentar uma solução para o problema em questão, como mostra a figura 3.

Figura 3 - Composição de Isometrias



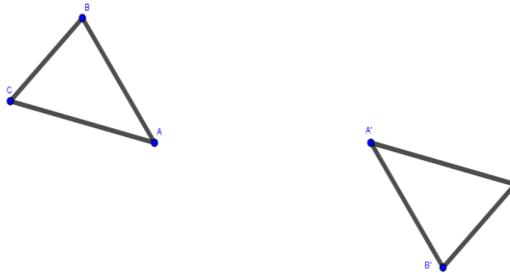
Fonte: Arquivo da pesquisa

Assim, deduziram que o triângulo $A''B''C''$, como imagem do triângulo $A'B'C'$, é o triângulo obtido por uma transformação geométrica equivalente à figura obtida por uma translação do triângulo ABC . Daí, deduziu-se que a *reflexão da reflexão*, onde os eixos de simetria são paralelos, produziu um resultado equivalente ao de uma translação da figura original.

Observou-se, ainda, que se a reflexão da reflexão ocorresse em planos perpendiculares haveria uma rotação da figura original.

2.º episódio – Buscando por demonstrações geométricas

Se dois triângulos têm ordenadamente dois lados e o ângulo compreendido entre eles congruentes, então, esses triângulos são congruentes. Demonstrar este teorema segundo a geometria dinâmica, levando em conta o movimento provocado pelas transformações geométricas dos triângulos abaixo.



Fonte: DANTAS et all (1996)

Os alunos em seus grupos sentiam-se motivados e envolvidos na busca pela resolução do problema com a mediação da professora-pesquisadora. Várias foram as ideias matemáticas por eles manifestadas estabelecendo relações entre elas no que se refere às transformações geométricas contidas no problema. E diziam:

A1: *Temos que usar a definição de triângulos congruentes.*

A2: *Sim, mas temos que partir da hipótese para chegar à tese.*

A2: *Mas como usar as transformações geométricas aqui? Usaremos somente a reflexão? ... Pela figura, parece que temos que usar a rotação...*

A professora, por vezes, intervinha explicando-lhes que precisavam

Interfaces da Educ., Paranaíba, v.10, n.30, p. 30-56, 2019

ISSN 2177-7691

movimentar o triângulo ABC de forma que ele fosse levado ao triângulo A'B'C' por uma composição de isometrias, mais especificamente pela reflexão, fazendo uso da simetria axial. Ou seja, disse a professora-pesquisadora:

Para mostrar que esses triângulos são congruentes, basta mostrar que o triângulo ABC pode ser levado ao triângulo A'B'C' por um transporte, de modo que o lado AB coincida com o lado A'B', o lado AC coincida com o lado A'C' e o ângulo A coincida com o ângulo A'. Neste caso, o transporte pode ser feito por meio de duas simetrias axiais.

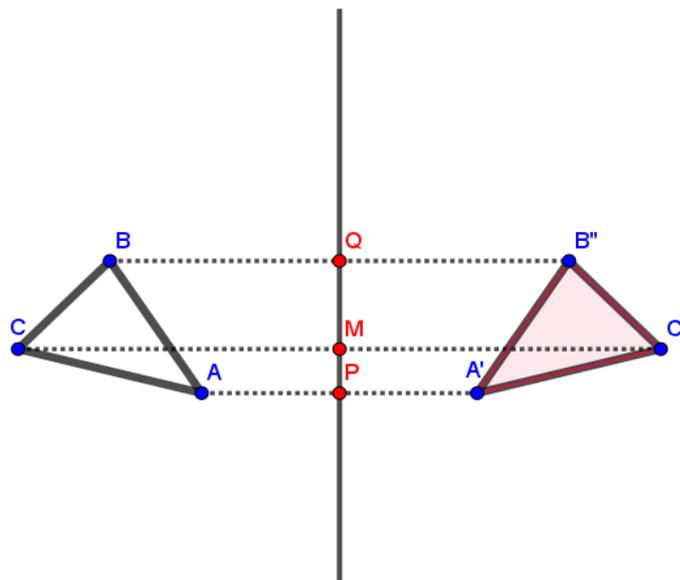
Depois de várias tentativas da resolução sem sucesso, a professora-pesquisadora entregou, por escrito, a cada grupo, uma folha contendo a demonstração e deixou que cada grupo o lesse e interpretasse o teor da demonstração, orientando-os para que fizessem desenhos visando a uma melhor compreensão do que liam.

A demonstração se apresentou assim:

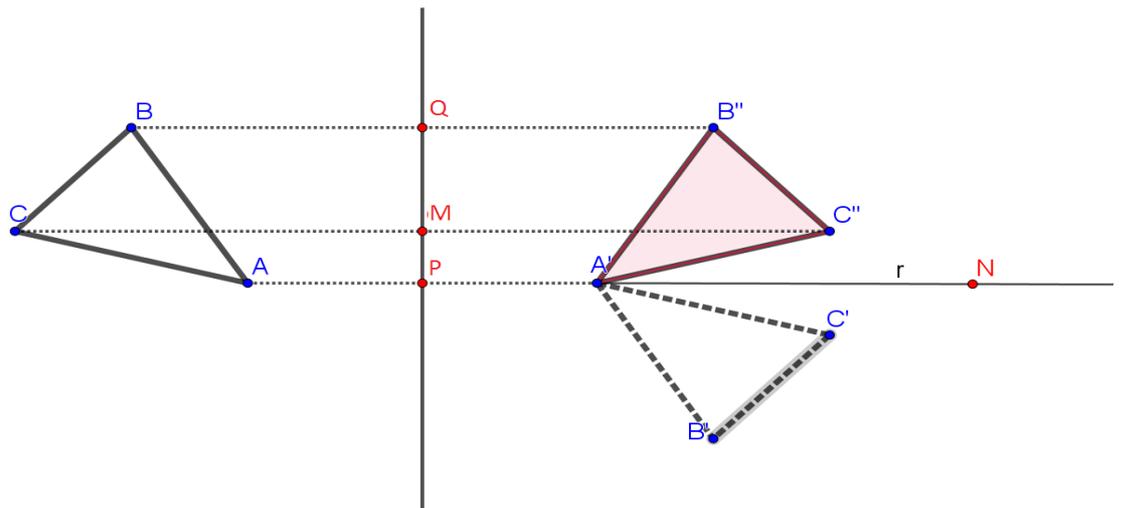
Devido à reflexão, os vértices A, B e C são levados a outros vértices refletidos A'B''C'', guardando a mesma distância de cada vértice relativamente ao eixo de simetria PQ. Assim, se P, M e Q são pontos do eixo de simetria, então $\overline{AP} \cong \overline{PA'}$, $\overline{BQ} \cong \overline{QB''}$ e $\overline{CM} \cong \overline{MC''}$.

A figura abaixo reflete essa situação e $\Delta ABC @ \Delta A'B''C''$, onde esse sinal é o símbolo para congruência.

(1)



Considerando, agora, a simetria cujo eixo é a reta $A'N$ que contém a bissetriz do ângulo $B'A'B''$, tem-se a figura seguinte, onde N é um ponto da semi-reta r começando no ponto A'



Observou-se que, na figura acima, a bissetriz $A'N$ do ângulo $B'A'B''$ é também bissetriz do ângulo $C''A'C'$ pois

$$C''\hat{A}'B'' = \hat{A} = \hat{A}' \quad \text{e} \quad B''\hat{A}'N = N\hat{A}'B'$$

Pela simetria de eixo $A'N$, tem-se que:

- a semi-reta $A'C''$ é levada à semi-reta $A'C'$;
- a semi-reta $A'B''$ é levada à semi-reta $A'B'$;

Portanto, o ângulo $B''A'C''$ é levado ao ângulo $B'A'C'$.

Além disso, tem-se que:

- o ponto C'' é levado ao ponto C' , pois $\overline{A'C''} = \overline{AC} = \overline{A'C'}$;
- o ponto B'' é levado ao ponto B' , pois $\overline{A'B''} = \overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Nessas condições, tem-se

$$\Delta A'B'C'' @ \Delta A'B'C' \quad (2)$$

Das relações **(1)** e **(2)** resulta que o $\Delta ABC @ \Delta A'B'C'$.

A visualização e o uso compreendido das isometrias trabalhadas permitiram aos alunos entender melhor o que acontecia quando cada uma delas opera. Isso é um avanço, pois tais habilidades são essenciais para desenvolver os processos necessários para resolver problemas de natureza geométrica, como no problema acima.

Fazendo referência ao que foi trabalhado, numa forma dinâmica, usando resultados já provados, bastaria, aos alunos, terem percebido que, na primeira reflexão chegar-se-ia a um triângulo congruente, embora na forma invertida. Na segunda reflexão, o triângulo refletido seria novamente congruente, mas sofrendo uma rotação.

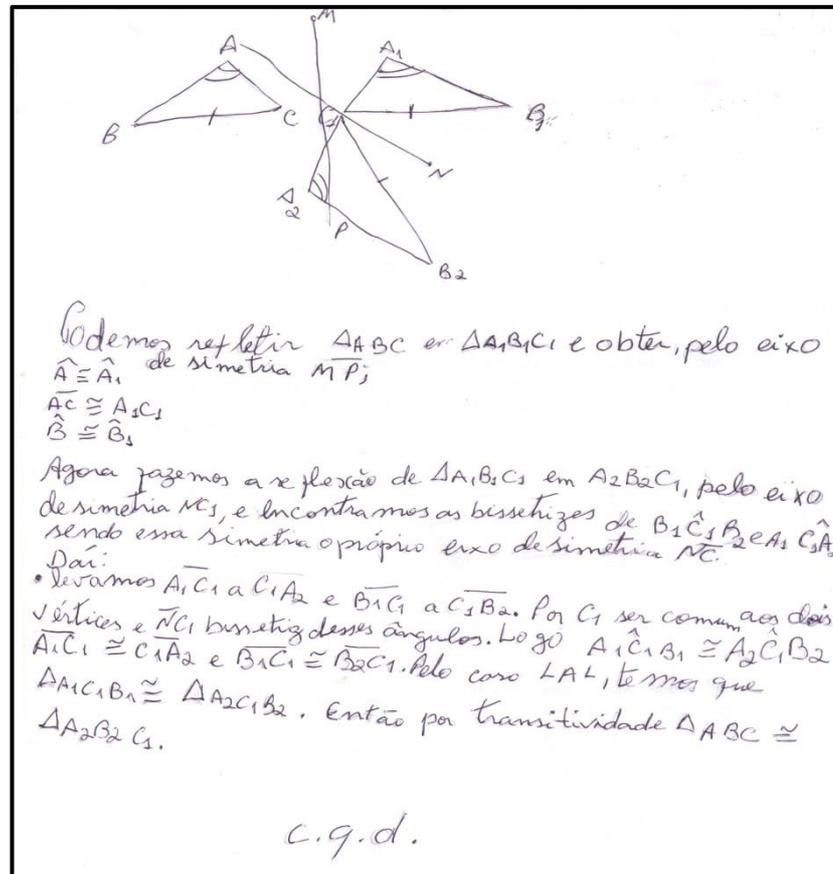
Pode-se observar que, lembrando-se das propriedades de composição de isometrias, as demonstrações tornam-se muito mais rápidas e claras para os alunos.

Para o segundo problema, que dizia:

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos adjacentes a ele congruentes, então, esses triângulos são congruentes. Prove este teorema segundo a geometria dinâmica, levando em conta o movimento provocado pelas transformações geométricas.

Os alunos, já familiarizados com a demonstração anterior, puderam esboçar uma resolução, como a solução sugerida por um aluno, conforme figura 4.

Figura 4: Resolução problemas Buscando por demonstrações

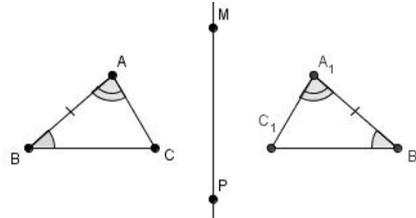


Fonte: Arquivo da pesquisa

Nota-se, na demonstração apresentada pelo aluno, que ele já havia adquirido dois elementos essenciais para a formação do pensamento geométrico: a visualização e a representação geométrica, facilitando, dessa forma, uma melhor compreensão na resolução do problema proposto. Entretanto, o que faltou a esse aluno foi o poder de argumentação geométrica para comunicar suas ideias. Possivelmente, essa dificuldade não seja atribuída a um desenvolvimento cognitivo lento mas, sim, devido a uma falta de compreensão no significado, no objetivo e na formalização de uma demonstração matemática.

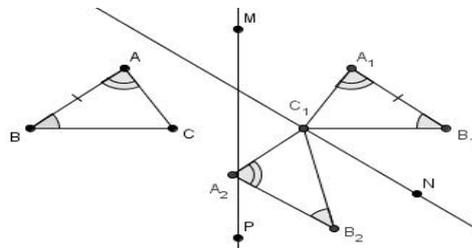
Valorizando a demonstração apresentada pelo aluno, a professora voltou-se para a lousa formalizando o problema em questão:

Consideremos os triângulos ABC e os triângulos $A_2B_2C_1$ tais que $\hat{A} \cong \hat{A}_2$, $\overline{AB} \cong \overline{A_2B_2}$ e $\hat{B} \cong \hat{B}_2$. Quer-se provar que o triângulo ABC é congruente ao triângulo $A_2B_2C_1$. Para isso, devemos, primeiro, levar o triângulo ABC ao triângulo $A_1B_1C_1$ pelo eixo de simetria MP , fruto de uma reflexão.



Com isso, verificou-se que: $\hat{A} \cong \hat{A}_1$, $\overline{AB} \cong \overline{A_1B_1}$ e $\hat{B} \cong \hat{B}_1$.

Fazendo a reflexão em $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_1$, pelo eixo de simetria NC_1 e traçando as bissetrizes $B_1\hat{C}_1B_2$ e $A_1\hat{C}_1A_2$



Daí, tem-se $\overline{A_1C_1} \cong \overline{C_1A_2}$ e $\overline{B_1C_1} \cong \overline{C_1B_2}$. Por C_1 ser comum aos dois vértices e NC_1 bissetriz desses ângulos, então: $A_1\hat{C}_1B_1 \cong A_2\hat{C}_1B_2$, $\overline{A_1C_1} \cong \overline{C_1A_2}$ e $\overline{B_1C_1} \cong \overline{C_1B_2}$. Pelo caso LAL, temos que o triângulo $A_1C_1B_1$ é congruente ao triângulo $A_2C_1B_2$.

Então, por transitividade, o triângulo ABC é congruente ao triângulo $A_2B_2C_1$.

Assim, acreditamos que trabalhar Geometria, buscando demonstrar suas proposições, ativa o raciocínio e leva o aluno a pensar matematicamente. Além disso, o raciocínio dedutivo é ponto fundamental para o avanço do conhecimento matemático dos estudantes em todos os níveis de escolaridade.

Considerações Finais

“O Curso de Licenciatura em Matemática se apresenta como um momento propício para a construção e uma reconstrução das concepções dos futuros professores, que possa conduzi-los a uma aprendizagem matemática realmente significativa” (PAVÃO, 2006, p.166). Futuros professores de

Matemática precisam entender “o que sabem”, “o que aprendem” “porquê aprendem” e “como aprendem”, para que, então, com segurança, como professores, possam guiar seus alunos na construção de novos conhecimentos. Há de se convir que a aprendizagem não começa com os alunos sentados numa carteira copiando problemas matemáticos resolvidos pelo professor. Em vez disso, eles devem ser estimulados a explorar seu próprio conhecimento, criar estratégias para a resolução dos problemas e saber discutir com seus colegas por que suas estratégias funcionam ou não.

Nessa perspectiva, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação da Matemática através da Resolução de Problemas, pôde cumprir o seu papel de propiciar ao futuro professor de Matemática momentos de criatividade, de interesse, de motivação e de participação ativa não apenas em seu grupo mas, também, na interação com os demais grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, durante as atividades propostas, diferentemente do que ocorre em uma aula tradicional. Esse trabalho também deu oportunidade aos alunos de discussões criativas nas plenárias realizadas.

Outro aspecto que se pode considerar nesse trabalho foi a abordagem dada, na formação do professor, especificamente na formação inicial dos futuros professores, às transformações geométricas, por se constituir um tópico central do ensino atual da Geometria como, por exemplo, o estudo das simetrias que possui uma relação da Matemática com o mundo real.

Trabalhar com as Isometrias em sala de aula foi um recurso que estimulou os alunos a pensar, explorar, construir, conjecturar, demonstrar e até generalizar resultados matemáticos não de uma maneira convencional, mas com sua participação ativa e compreensão e significado. Vale salientar que as tarefas foram exploradas com o uso de papel transparente para ressaltar as Isometrias, mas é importante frisar aqui que esse trabalho poderia ser desenvolvido com recurso a um software matemático, como por exemplo, o Geogebra que traria uma maior dinamização as figuras.

Seu conceito, bem como o conhecimento de suas propriedades são fundamentais e devem ser exploradas desde o início da Educação Básica, sobretudo no ensino-aprendizagem da Geometria, no sentido de dar a elas um

tratamento que tenha por ponto de partida e desenvolva as intuições que os alunos já possuem e prossiga numa via lenta de formalização ao longo de toda a escolaridade, percebendo sua conexão com outros ramos da Matemática, como por exemplo na Geometria e na Álgebra.

É, pois, imprescindível que os futuros professores tenham oportunidades, durante sua formação, de vivenciar e experimentar no curso de Licenciatura, nas disciplinas pedagógicas, bem como nas disciplinas matemáticas nesses cursos, não só para promover a construção de conhecimento matemático específico, mas para oferecer aos licenciandos a oportunidade de vivenciar e, assim, incorporar à sua prática.

Referências

ALLEVATO, N.S.G.; ONUCHIC, L.R. Teaching mathematics in the classroom through problem solving. In: *Research and Development in Problem Solving in Mathematics Education*, ICME, México, 2008, p. 59-70.

ALMOULOUD, S. Ag. et al. *A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos*, 2004, p. 94-108. Disponível em: < <http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a06.pdf>> Acesso em: 18/07/2009.

ANDRADE, J.A.A; NACARATO, A. Tendências didático-pedagógicas para o ensino de Geometria. GT. Educação Matemática, n°. 19. Disponível em < <http://27reuniao.anped.org.br/gt19/t197.pdf> > Acesso em 25/11/2018.

ANDRADE, S. *Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 1998.

BARRANTES, M. e BLANCO, L.J. Caracterização das concepções dos professores em formação sobre ensino-aprendizagem da matemática. *Zetetiké*, n. 25, v. 14, 2006, p. 65-92.

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Matemática)*. 3ª ed. Brasília: A Secretaria, 2001.

BRASIL. MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática 3º e 4º ciclos: Matemática*. Brasília, 1998.

_____. Parecer CNE/CP n.º 009/2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena 2001. Disponível em: . Último acesso em: 22 maio 2019.

- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora, 1991.
- D'AMORE, B. *Elementos de Didática da Matemática*. Tradução de Maria Cristina Bonami. São Paulo, Editora e Livraria da Física, 2007.
- DANTAS, M.M.S. et al. *As Transformações Geométricas e o Ensino da Geometria*, vol 1. Salvador: EDUFBA, 1996.
- GUIMARAES, S.D., VASCONCELLOS, M. e TEIXEIRA, L.R.M. O ensino de geometria nas séries iniciais do Ensino Fundamental: concepções dos acadêmicos do Normal Superior. *Zetetiké*, v.14, nº 25, 2006, p. 93-105.
- MARINCEK, V.; CAVALCANTI, Z. *Aprender Matemática resolvendo Problemas*. Porto Alegre, Artmed Editora, 2001.
- NACARATO, A.M.; PASSOS, C.L.B. *A Geometria nas Séries Iniciais: Uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores*. São Carlos: EDUFScar, 2003.
- NASSER, L.; TINOCO, L. *Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático, Módulos 1,2 e 3*, 3ª edição, Rio de Janeiro: UFRJ/IM, Projeto Fundão, 2004.
- NCTM *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.
- NUNES, C. B. *O processo ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática*. Tese de Doutorado – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2010.
- ONUCHIC, L. R. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? *Revista Espaço Pedagógico*, Passo Fundo, v.20, n. 1, p. 88-104, jan./jun. 2013.
- ONUCHIC, L.R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectiva*. São Paulo, SP: Editora UNESP, 1999, p. 199-220.
- PAVAO, Z.M. Formação do professor-educador matemático em cursos de licenciatura. *Revista Diálogo Educacional*, Curitiba, vol.6, nº 18, maio/ago. 2006, p.161-168.
- PONTE, J.P. et.al, *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte, Autêntica, 1ª edição, 2ª reimpressão, coleção Tendências em Educação Matemática, 2006.
- ROSA, T. O. M. da. *A Geometria nos cursos de Licenciatura em Matemática no Rio Grande do Sul: algumas considerações*. Trabalho de Sistematização do Curso em Matemática – Licenciatura da UNIJUÍ – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, 2016. Disponível em: <http://bibliodigital.unijui.edu.br:8080/xmlui/bitstream/handle/123456789/3283/Artigo%20versao%20final%20-%20TATIANE%20oficial%2023-02.pdf?sequence=1>. Acesso em 18/12/2018.

O uso das transformações geométricas *através da* resolução de problemas na formação de futuros professores de matemática

VAN DE WALLE, J. A.; LOVIN, L.A. *Teaching Student-Centered Mathematics – Grades 5-8*. New York: Pearson, 2006.