

Os significados de fração: um estudo em uma coleção de livros didáticos para os anos iniciais

The meanings of fractions: a study in a collection of textbooks for the initial years

Angelica da Fontoura Garcia Silva¹
Maria de Fátima Rico Abade Lima²

Resumo:

Este estudo documental teve como objetivo analisar a introdução e os significados atribuídos às frações em uma coleção de livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental, aprovada pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2019 e 2020. O embasamento teórico fundamenta-se na Teoria dos Campos Conceituais e em pesquisas da área que enfatizam a construção do conhecimento por meio da resolução de situações-problema, as quais conferem significado ao conceito. Buscou-se identificar as interpretações de fração como parte-todo, quociente, operador e razão. Os resultados da análise revelam que a coleção apresenta a fração inicialmente pela ideia de metade, porém, em algumas situações, recorre à partição de alimentos, o que pode gerar inconsistências teóricas. Além disso, identificou-se a utilização dos diferentes significados das frações, extrapolando o indicado nas diretrizes das habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes conforme previsto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). No entanto, nota-se uma preocupação com a desigualdade na abordagem dos significados, com maior ênfase em parte-todo, seguido por razão, operador e quociente. Especificamente, a escassez de situações envolvendo o significado quociente é identificada como uma lacuna preocupante, uma vez que o trabalho com esse significado é considerado importante para a compreensão da divisão entre números naturais.

Palavras-chave: Fração; Significado; Anos Iniciais; Livro Didático.

Abstract:

This documentary study aimed to analyze the introduction and meanings attributed to fractions in a collection of elementary school mathematics textbooks, approved by the 2019 and 2020 National Textbook Program (Programa Nacional do Livro Didático - PNLD). The theoretical framework is based in theory of conceptual fields and research in the area that emphasizes the construction of knowledge through the resolution of problem situations, which gives meaning to the concept. We sought to identify the interpretations of fractions as part-whole, quotient, operator, and ratio. The analysis results reveal that the collection initially presents fractions as half. However, in some situations, it uses the partition of fruits, which can cause theoretical inconsistencies. Furthermore, different meanings of fractions were identified, going beyond what is indicated in the guidelines for skills to be developed by students as provided for in the National Common Curriculum Base (Base Nacional Comum Curricular - BNCC). However, inequality in the approach to meanings is a concern, with greater emphasis on part-whole, followed by ratio, operator, and quotient. Specifically, the scarcity of situations involving the meaning of quotient is identified as a worrying gap since work with this meaning is considered important for understanding the division between natural numbers.

Keywords: Fraction; Meaning; Initial Years; Textbook.

¹ Doutora em Educação Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da PUC-SP; professora do Programa de Pós-Graduação em Metodologias para o Ensino de Linguagens e suas Tecnologias da Unopar. <https://orcid.org/0000-0002-2435-9240> e-mail angelicafontoura@gmail.com

² Doutoranda em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unian-SP; professora da Rede pública estadual de São Paulo. <https://orcid.org/0009-0000-2265-3836> e-mail fatimarioal@gmail.com

Introdução

Esta pesquisa tem o propósito de analisar a introdução e os significados de frações apresentadas em uma coleção de livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental, aprovadas pelos PNLD de 2019 e de 2020.

Nossa opção por analisar livro didático se deve ao fato de que pesquisas nacionais e internacionais consideram esse recurso material uma fonte muito utilizada por professores e alunos (Cirillo, Drake e Herbel-Eisenmann, 2009; Alajmi, 2012; Garcia Silva, Canova e Campos, 2016; Scheffer e Powell, 2019 e Souza e Powell, 2021)

Conforme orientações curriculares federais, no Brasil o ensino de fração é apresentado aos estudantes desde os primeiros anos do Ensino Fundamental (Brasil, 1997, 2018). Mesmo assim, estudos têm mostrado o mau desempenho de estudantes brasileiros quanto a compreensão das frações e avaliada em todos os níveis de ensino (Silva, 1997; Rodrigues, 2005; Canova, 2013; Santos 2016; Souza e Powell, 2021).

A fim de apresentar a pesquisa realizada optamos expomos a seguir referenciais utilizados na análise dos livros didáticos. Em seguida delineamos os procedimentos metodológicos que nos permitiram interpretar os dados e, ao final, discutimos os resultados encontrados e as contribuições deste estudo

Marco Teórico

Para abordar as pesquisas sobre os processos de aprendizagem de frações examinamos descobertas de estudos relacionadas à construção de conceitos. Fundamentando-nos em estudos da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990, 2009) para discutir tal construção. Apoiado em Piaget, esse investigador postula que a construção do conhecimento não é imediata, ocorrendo por meio da resolução de situações-problema que conferem significado ao conceito.

Este estudo revela que o referido processo implica em proporcionar aos aprendizes oportunidades para lidar com o conceito a ser desenvolvido em diversas situações (S). Além disso, destaca também a consideração de que cada situação carrega consigo uma diversidade de conceitos. Segundo Vergnaud (1990, 2009), além das situações, o conceito é delineado por outros dois conjuntos: I - invariantes, que sustentam a funcionalidade do conceito (objetos, propriedades, relações); R - representações (simbólicas, linguísticas, gestuais, ...), que podem ser empregadas para simbolizar invariantes, situações e procedimentos. Nesse contexto,

argumentamos que o conceito é formado a partir da tríade $C = (S, R, I)$. Neste estudo nos atemos aos significados atribuídos as frações que podem ser apresentados em tarefas descritas nos livros didáticos.

Quanto a essa temática observamos documentos curriculares oficiais apoiados em pesquisas da área têm descrito diferentes interpretações dos significados das frações (Brasil, 1997, 2018). Apoiados nesses documentos esta investigação analisará a presença dos significados parte-todo, quociente, operador e razão.

A relação parte-todo, representa a partição de um todo em N partes iguais, em que cada parte pode ser representada como $1/n$. A fração interpretada como quociente indica uma divisão e seu resultado. Nas situações de quociente, temos duas variáveis, sendo que uma corresponde ao numerador e a outra ao denominador. A fração como operador é um valor escalar aplicado a uma quantidade, ou seja, um multiplicador da quantidade indicada. Finalmente, a fração como razão, presente em contextos diversificados, é interpretada como uma comparação e relação entre grandezas.

Analisando essa diversidade de significados, sob o ponto de vista dos processos de ensino e de aprendizagem da fração, concordamos com Vergnaud (1990, 2009) e pesquisas da área (Nunes e Bryant, 1997, Mamede, 2007, 2011, Campos e Magina, 2010 e Powell, 2018) e documentos curriculares quando afirmam que para o contato dos estudantes com os diferentes significados da fração é um fator importante para a construção do conceito.

Ainda no tocante à aprendizagem das frações, estudos ligados à Psicologia, como os de Spinillo (1992), também nos ajudam a vislumbrar caminhos que podem favorecer a compreensão das crianças sobre as ideias envolvidas na fração. Buscamos no estudo da autora elementos para compreender como o estudo das frações pode ser introduzido. Da mesma forma que Vergnaud, a autora, fundamentada em Piaget, indica que as crianças, desde muito cedo, podem estabelecer relações de comparação do tipo parte-todo ou parte-parte. Destaca ainda que a ideia de metade ajuda as crianças compreendem melhor a relação parte-parte, sobretudo quando fazem comparações do tipo mais que metade, menos que metade e igual à metade. Assim, segundo a pesquisa de Spinillo (1992) essa noção pode ser uma boa forma de introduzir o conceito de fração.

Procedimentos Metodológicos

Destacamos que esta investigação é parte de uma pesquisa de mestrado (Lima, 2021) na qual utilizamos uma proposta baseada em um método de pesquisa documental e bibliográfico

de natureza qualitativa, apresentando características como as descritas por Gil (2002). Na coleta dos dados, realizamos, uma pesquisa detalhada nos cinco volumes de uma coleção de livro didático dos anos iniciais.

Neste estudo buscamos investigar a abordagem do conceito de fração ao longo do Ensino Fundamental em uma coleção aprovada pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD –. Um programa do governo federal brasileiro destinado a comprar e distribuir livros e materiais didáticos a partir de avaliações didáticas, pedagógicas e literárias das obras.

A coleção de livros analisada é de autoria de Luiz Roberto Dante. Recebe o título de *Ápis*, é publicada pela editora Ática (Dante, 2017a, 2017b, 2017c, 2017d) aprovada no PNLD de 2019. Essa coleção é destinada aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Usamos aqui a terceira edição, a do ano de 2017, pois foi a que participou do PNDL de 2019. A estrutura da coleção é composta, além dos conteúdos de Matemática propostos para o ano, por uma organização comum para todos os livros dos Anos Iniciais e para todas as unidades do livro.

Essa análise foi desenvolvida a partir da análise das tarefas do segundo ano do EF uma vez que nesse volume já se apresenta, de forma indireta, a fração por meio de conceitos como metade, terça parte, décima parte. Esse conteúdo é discutido até o quinto ano do Ensino Fundamental. Para analisar as diferentes interpretações das situações, selecionamos todas as propostas, identificamos o significado presente em cada uma delas e as apresentamos quantitativamente em um quadro elaborado para esse fim – Tabela 1. Para detalhar a presença dessas interpretações analisamos qualitativamente alguns exemplos dos significados buscando convergências e complementações entre as situações apresentadas – Quadros 1, 2, 3, 4 e 5.

Os significados da fração em uma coleção de livros didáticos dos Anos Iniciais

Para identificar quais significados de fração estão presentes nas atividades das unidades temáticas referentes a esse conteúdo expomos o Quadro 1, que contém tarefas de cada um dos significados de fração presentes no livro, percebemos que nem todos os anos do início da escolaridade do Ensino Fundamental trazem à luz propostas para o ensino de todos os significados de fração.

QUADRO 1 – Quantidade de atividades dos significados das frações dos Anos Iniciais da coleção analisada

Coleção/Ano	Parte-todo PT	Razão R	Quociente Q	Operador O	Total de atividades
Ápis 1º ano	0	0	0	0	0
Ápis 2º ano	7	0	0	5	8
Ápis 3º ano	1	1	2	4	6
Ápis 4º ano	8	7	0	7	20
Ápis 5º ano	18	12	4	4	48
Total	34	21	6	20	81
% Total	42,0	25,9	7,4	24,7	100



Fonte: Lima (2021)

É possível notar que, no âmbito geral, a quantidade total de situações não é equivalente à soma total de significados, pois algumas atividades propostas na coleção desenvolvem ideias ligadas a mais de um significado. O cálculo da porcentagem foi feito a partir do número de atividades de cada significado em relação ao de atividades presentes no livro. A quantidade de situações aqui relacionada não inclui tarefas complementares ou de revisão.

Analisando as situações sob a perspectiva de Vergnaud (1990, 2009), notamos que apesar de não encontrarmos situações variadas do ponto de vista quantitativo, observamos que houve uma certa diversificação dos significados da fração no decorrer dos anos. Nesse contexto, consideramos que a preocupação de propor tal diversidade pode favorecer a construção do conceito de fração, mas é importante que o professor tenha ciência de que muitas vezes será preciso ampliar tais proposições, considerando sempre os conhecimentos explicitados por seus alunos.

O estudo dos significados de fração está proposto a partir do quarto ano. Porém, temos no segundo e no terceiro ano um trabalho introdutório a partir de noções de metade, terça parte, quinta parte e décima parte, que também envolve tais significados (quadro 2).

QUADRO 2 – Exemplos de atividades introdutórias presentes nos livros didáticos do 2º e 3º anos.

Ano	Exemplo de atividade	Contexto
Segundo ano	 <p>(Dante, 2017a, p. 153)</p>	<p>Antes da atividade propriamente dita, encontramos uma explicação do conceito de metade. Propõe-se aos alunos que assinalem qual das frutas estão cortadas exatamente em duas metades</p>
Terceiro ano	 <p>(Dante, 2017b, p. 158)</p>	<p>Nas atividades 1 e 2, os estudantes devem preencher as lacunas com aquilo que é pedido em relação aos conceitos- metade e terça parte. O item A das duas atividades refere-se à razão de figuras planas iguais em relação ao total de figuras planas. O item B pede para calcular a quantidade de metade ou a terça parte de certa quantidade.</p>

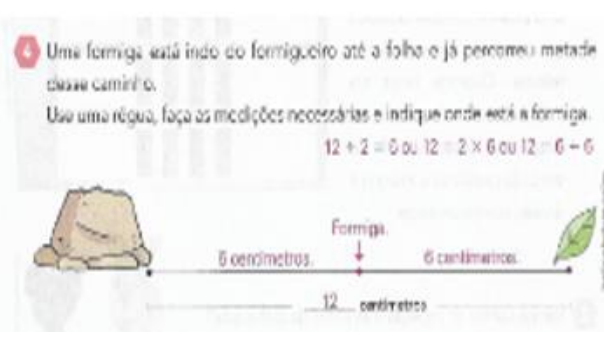
Fonte: Elaborado pelas autoras.

Essa proposta de trabalho é consonante com o que descreve a BNCC (Brasil, 2018) e pesquisas da área. Segundo esse documento, nos primeiros anos, é indicada a exploração de noções de metade e terça parte e divisão em partes iguais.

O uso da ideia de metade desde os primeiros anos também é recomendado por Spinillo (1992). A autora afirma que essa concepção serve de referencial e, como já exposto, favorece à criança o desenvolvimento de habilidades que lhe possibilitem fazer julgamentos como *mais que metade*, *menos que metade* e *igual à metade*, além de ampliar sua capacidade de comparação de dimensões complementares nas relações de primeira ordem (parte-parte). Todavia, assim como observou Scheffer e Powell (2019) notamos que apesar de o autor preocupar-se em apresentar uma situação do dia a dia (partição de frutas) a proposta pode não favorecer a construção da ideia de metade. Pode ser difícil garantir a equivalência das partes, pois envolve uma medida de massa em que os pedaços, após o corte, podem não corresponder em igualdade de tamanho e massa. Ao observar o Quadro 3, deparamo-nos com atividades do segundo e do terceiro ano que envolve o significado de parte-todo.

QUADRO 3 – Exemplos de atividades que envolve o significado parte-todo nos livros didáticos do 2º e 3º anos.

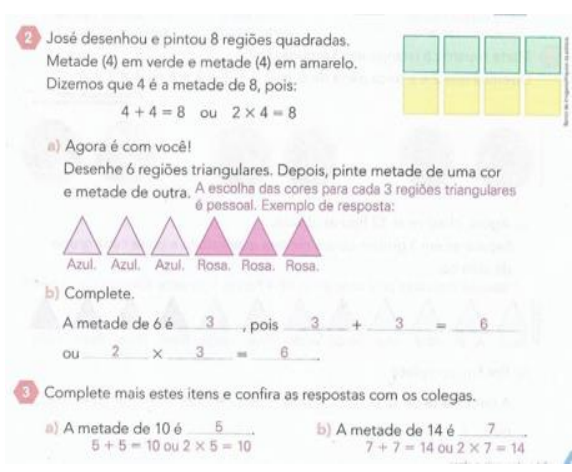
Ano	Exemplo de atividade	Contexto
Segundo ano	<p>Terça parte</p> <p>1 Assinale as figuras em que a parte pintada indica a terça parte da figura. As 3 partes não são iguais no tamanho.</p> <p>As 3 partes não são iguais no tamanho. Aqui são 4 partes iguais. As 3 partes não são iguais no tamanho.</p> <p>(Dante, 2017a, p. 154).</p>	O aluno deve assinalar as figuras em que a parte pintada representa a terça parte do todo.

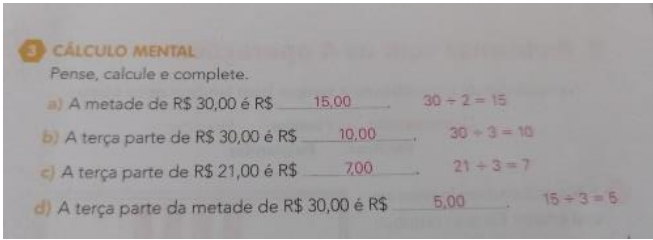
Terceiro ano	 <p>(Dante, 2017b, p. 159).</p>	<p>A atividade solicita que o estudante faça a medição com a régua do comprimento que representa a metade de um caminho que a formiga precisa percorrer para chegar à folha.</p>
--------------	--	--

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Além da relação parte-todo encontramos no segundo e terceiro ano situações que envolvem outros significados. Essas atividades desses anos também preparam o aluno para a compreensão do operador (Quadro 4); por meio delas, propõe-se que o professor desenvolva um trabalho com a quantidade de metade ou terça parte das situações ou dos elementos presentes nas atividades.

QUADRO 3 – Exemplos de atividades que envolve o significado operador nos livros didáticos do 2º e 3º anos.

Ano	Exemplo de atividade	Contexto
Segundo ano	 <p>(Dante, 2017a, p.153).</p>	<p>A atividade contém duas situações. Na primeira, propõe-se aos alunos que pintem metade das figuras geométricas de uma cor e a outra metade de outra. Na segunda, solicita-se que eles completem as lacunas com aquilo que se pede sobre as metades das quantidades.</p>

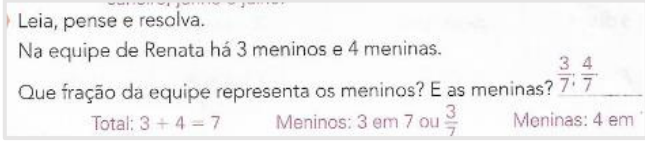
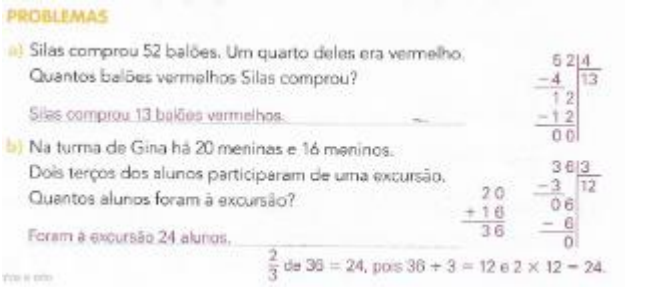
Terceiro ano	 <p>(Dante, 2017b, p. 159).</p>	<p>É proposto que os alunos calculem mentalmente metade e terça parte de valores monetários</p>
--------------	---	---

Fonte: Elaborado pelas autoras.

No que concerne aos significados apresentados pelo livro nos três primeiros anos de escolaridade, a análise da Tabela 1 nos permite notar que o mais recorrente é operador (nove situações), seguido do significado de parte-todo (oito situações). Já a prática com razão e quociente é proposta para duas situações no segundo caso e para uma no primeiro. Era de se esperar a pequena incidência de situações envolvendo razão, mas a ideia de quociente poderia ser uma forma de introduzir os racionais a partir da análise de divisão entre números naturais. Isso também é identificado na pesquisa de Garcia Silva, Canova e Campos (2016), quando analisam três coleções de livros didáticos de Matemática aprovados na edição do PNLD de 2010 e observam que esse tipo de introdução não é utilizado pelos autores das coleções.

No livro do quarto ano da coleção aqui analisada, são sugeridas atividades que permitem aos estudantes o reconhecimento de frações unitárias. São indicadas por Dante (2017c) 20 atividades; dessas, 6 envolvem 2 significados e 2 não englobam nenhum. Em consonância com o observado por Garcia Silva, Canova e Freire (2016) no livro do quarto ano da coleção analisada pelas autoras, a relação *parte-todo* de frações unitárias teve maior incidência — 10 atividades. Os significados *operador* e *razão* também foram bastante explorados (7 incidências para cada). No quadro 5, exposto a seguir mostramos duas dessas situações.

QUADRO 5 – Exemplos de atividades sobre os significados de fração no livro didático do 4º ano.

Ano	Exemplo de atividade	Contexto
Quarto ano	 <p style="text-align: center;">(Dante, 2017a, p.206).</p>	<p>Pede-se ao estudante que leia o enunciado, pense sobre ele e relacione a quantidade de meninos e de meninas de uma equipe com o total.</p>
Quarto ano	 <p style="text-align: center;">(Dante, 2017c, p. 208)</p>	<p>Nas duas situações em que se propõe operar a fração relacionada a uma grandeza discreta.</p>

Fonte: Elaborado pelas autoras.

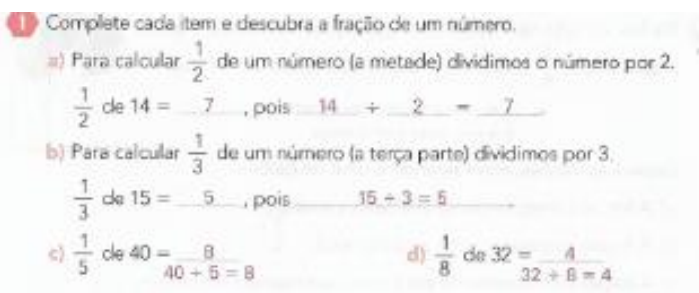
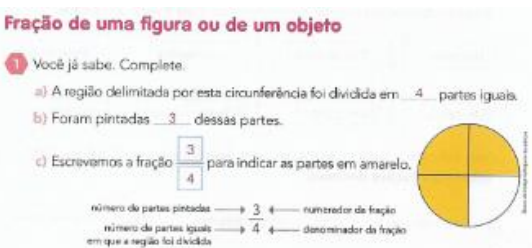
No quarto ano, não averiguamos propostas de atividades que envolvessem o significado de quociente; essa escassez também é observada por Garcia Silva Canova e Freire (2016). As autoras encontram esse tipo de situação em apenas uma coleção analisada por elas para esse ano de escolaridade. Reiteramos que isso nos parece preocupante, uma vez que Mamede (2007, 2011) mostra que o trabalho com esse significado é bastante importante, já que ele se assenta “[...] na distribuição equitativa de quantidades, ajudando a criança a entender, por exemplo, a relação inversa entre o divisor e o quociente, quando o dividendo é o mesmo.” (Mamede, 2011, p. 4). A escassez de situações envolvendo os diferentes significados no livro do quarto ano da coleção aqui analisada pode também ter relação com as indicações da BNCC (Brasil, 2018): esse documento curricular não descreve nenhuma habilidade que envolva os diferentes sentidos da fração.



Outro diferencial entre a coleção *Ápis* e as analisadas por Garcia Silva, Canova e Campos (2016) foi a presença, no quarto volume, da representação da reta numérica para o

desenvolvimento do conceito de medidas menores do que a unidade. Tal ideia não é explorada na coleção investigada pelas autoras. Essa proposta de Dante (2017c) atende a habilidade nove da BNCC (Brasil, 2018, p. 289). Tais atividades que envolvem medida foram classificadas como parte-todo.

No quinto volume da coleção *Ápis*, as atividades propostas envolvem todos os significados aqui analisados: parte-todo, razão, operador e quociente (alguns exemplos no quadro 6). Dante (2017d) inclui 48 atividades; dessas, 4 envolvem 2 significados, e 15 não integram nenhum.

QUADRO 6 – Exemplos de atividades sobre os significados de fração no livro didático do 5º ano.

Ano	Exemplo de atividade	Contexto
Quinto ano	 <p>(Dante, 2017d, p.134).</p>	Os estudantes operam frações unitárias
Quinto ano	 <p>(Dante, 2017d, p.131).</p>	O aluno deve observar um círculo que está dividido em quatro partes iguais e tem três delas pintadas de amarelo. Depois, precisa responder às perguntas propostas.

Quinto ano	<p>2 Indique a fração correspondente a cada caso.</p> <p>a) As flores vermelhas neste conjunto de flores. $\frac{10}{7}$ (3 em 7)</p>  <p>Flores.</p> <p>b) Os serrotes neste grupo de ferramentas. $\frac{2}{9}$ (3 em 9)</p>  <p>Ferramentas.</p> <p>(Dante, 2017d, p.131).</p>	<p>A fração aqui é representada a partir da relação com o todo.</p>
------------	---	---

Fonte: Elaborado pelas autoras.

O significado com maior incidência é parte-todo (17 situações), vindo ao encontro da habilidade EF05MA03 da BNCC (Brasil, 2018), que se refere ao resultado de uma divisão e à ideia de parte-todo, porém o quociente (divisão) é mencionado em apenas 4 atividades.

Comparemos esses dados com as indicações dos documentos oficiais. Nos PCN (Brasil, 1997), o trabalho referente ao segundo ciclo, que envolve o quinto ano, propõe que o professor apresente a seus alunos os significados de parte-todo, quociente e razão, não se referindo ao significado de operador. Todavia, o significado de operador e razão não aparece como indicação para o ensino de alunos do quinto ano na BNCC (Brasil, 2018), apesar de ser evidenciada a presença desse conteúdo (operador tem 4 situações, e razão, 12) nas atividades do livro analisado por nós.

No que se refere aos significados, analisando o Tabela 1, é possível notar que o mais trabalhado nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental é parte-todo, seguido por razão, operador e, por fim, quociente. Essa constatação se aproxima à feita por Garcia Silva, Canova e Campos (2016) nos livros analisados por elas, que têm situações de parte-todo em sua maioria; porém, um fator se distancia: o quociente. Este, no material estudado pelas autoras, é introduzido apenas em uma coleção, sendo que a *Ápis* o aborda no terceiro e no quinto ano. Sobre essa questão Nunes *et al.* (2003) e Mamede (2007, 2011) recomendam que a introdução do ensino de frações se dê por meio da exploração da ideia de quociente, justamente por favorecer a ampliação da compreensão da divisão entre números naturais.

Considerações Finais

Concluimos, nesta análise sobre as atividades relacionadas aos significados de fração, que a coleção *Ápis* (Dante, 2017a, 2017b, 2017c, 2017d) dos Anos Iniciais que a coleção introduz a fração por meio da ideia de metade, sobretudo envolvendo o significado parte-todo, mas em algumas situações se utiliza da partição de frutas que pode ocasionar inconsistência

teórica já que esse tipo de corte não representará, no mundo real, a equivalência de tamanho e massa.

Além disso, observamos que a coleção explora atividades com os diferentes significados e vai além do que é proposto na BNCC (Brasil, 2018). Todavia, não parece preocupar-se em oferecer igualmente a mesma quantidade de situações dos diferentes significados, já que as atividades que discorrem sobre quociente são apenas seis, enquanto os demais aparecem em maior número. Isso nos preocupa, já que o trabalho com quociente pode favorecer a ampliação da ideia de divisão com números naturais.

Referências Bibliográficas

ALAJMI, A. H. (2012). How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. **Educational Studies in Mathematics**, 79(2), 239-261. Disponível em:

<https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-011-9342-1> acesso em 12 Abr. 2024.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, Washington, v. 59, p. 389-407, n. 5, 2008. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER, E. Rational Number concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (ed.). **Acquisition of Mathematics concepts and Processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 91-125. Disponível em:

https://www.researchgate.net/publication/258510439_Rational_number_concepts acesso em 12 Abr. 2024.

BEHR, M.; KHOURY, H.; HAREL, G. Conceptual Units Analysis of Preservice Elementary School Teachers' Strategies on a Rational-Number-as-Operator Task. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 28, n. 1, p. 48-69, 1997. <https://doi.org/10.2307/749663>

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em:

http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192

Acesso em: 3 fev. 2021.

_____. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Fundamental: Primeiro e segundo ciclo - Matemática**.

Brasília, DF: SEF/MEC, 1997. Disponível em:

<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf> acesso em 12 Abr. 2024.

CANOVA, R. F. **Um estudo das situações parte-todo e quociente no ensino e aprendizagem do conceito de fração**. 2013. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2013. Disponível em:

<https://repositorio.pgsscogna.com.br/handle/123456789/32051> acesso em 12 Abr. 2024.

CIRILLO, M., DRAKE, C., HERBEL EISENMANN, B.; HIRSCH, C. . Curriculum vision and coherence: Adapting curriculum to focus on authentic mathematics. **Mathematics Teacher**, 103(1), 70-75. 2009. <https://doi.org/10.5951/MT.103.1.0070>

DANTE, L. R. **Ápis: Matemática: 2º ano do Ensino Fundamental**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017a.

_____. **Ápis: Matemática: 3º ano do Ensino Fundamental**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017b.

_____. **Ápis: Matemática: 4º ano do Ensino Fundamental**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017c.

_____. **Ápis: Matemática: 5º ano do Ensino Fundamental**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017d.

GARCIA SILVA, A. F.; PIETROPAOLO, R.; PINHEIRO, M. G. C. Conhecimento matemático para o ensino das frações: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais. **Boletim Gepem**, Seropédica, v. 69, p. 118-140, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufrj.br/index.php/gepem/article/view/104> acesso em 12 Abr. 2024.

GARCIA SILVA, A. F.; CANOVA, R. F.; CAMPOS, T. M.A. Fração em livros didáticos de Matemática para os Anos Iniciais. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 18, n. 1, p.41-54, jan./abr. 2016. Disponível em: <http://posgrad.ulbra.br/periodicos/index.php/acta/issue/view/139> acesso em 12 Abr. 2024.

GARCIA SILVA, A. F.; FREIRE, J. C. O.; CANOVA, R. F. Um estudo das frações presentes em livros didáticos nas perspectivas da teoria dos campos conceituais. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 12., São Paulo. **Anais [...]**. Brasília, DF: Sbem, 2016. p. 1-12 Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7211_3489_ID.pdf acesso em 12 Abr. 2024.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

LIMA, M.F.R.A. **Numero Racional na representação fracionária: uma análise em livros didáticos do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo. 165 f. 2021. Disponível em: <https://repositorio.pgsscogna.com.br/handle/123456789/38679> acesso em 09 jul.2024.

MAMEDE, E. A compreensão do conceito de fracção – Que papel têm as situações? *In: SIEM*, 18., 2007. **Actas [...]**. Lisboa: APM, 2007.

_____. Sobre o ensino e aprendizagem de fracções nos níveis elementares de ensino. *In: PROFMAT*, 2011, Lisboa. **Actas [...]**. Lisboa: APM, 2011 Disponível em: https://www.apm.pt/files/files/SIEM/Atas_SIEM/2011_Lisboa_ATAS_XXII_SIEM.pdf acesso em 12 Abr. 2024.

NUNES, T.; BRYANT, P.; PRETZLIK, U.; HURRY, J. The effect of situations on children's understanding of fractions. *In: MEETING FOR THE BRITISH SOCIETY FOR RESEARCH ON THE LEARNING OF MATHEMATICS*, 2003, Oxford. **Proceedings [...]**. Oxford: British Society for Research on the Learning of Mathematics, 2003

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). **Revemop**, Ouro Preto, v. 1, n. 3, p. 476-503, 2019. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/revemop/article/view/1977> acesso em 12 Abr. 2024

RODRIGUES, W. R. **Números Racionais**: um estudo das concepções dos alunos após o estudo formal. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11114/1/dissertacao_wilson_roberto_rodrigues.pdf acesso em 12 Abr. 2024.

SANTOS, R. S. **Rendimentos e Estratégias de Estudantes Concluintes do Ensino Fundamental na Resolução de Itens de Avaliações Externas**. 2016. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em: <https://repositorio.pgsscogna.com.br/handle/123456789/31914> acesso em 12 Abr. 2024.

SILVA, M. J. R. **Sobre a Introdução do Conceito de Número Fracionário**. 1997. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 1997. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11516/2/Maria%20Jose%20Ferreira%20da%20Silva.pdf> acesso em 12 Abr. 2024.

SOUZA, M.A.V.F.; POWELL, A.B. Como os livros didáticos do Brasil, dos Estados Unidos e do Japão tratam das frações?. **Acta Scientiae**, v. 4, pág. 77-111, 2021. Disponível em: <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/6413> acesso em 19/02/2024

SPINILLO, A. G. A importância do referencial de “metade” e o desenvolvimento do conceito de proporção. **Psicologia: Teoria e Pesquisa**, Brasília, DF, v. 8, n. 3, p. 305-317, 1992. Disponível em: <https://periodicos.unb.br/index.php/revistaptp/article/view/17142> acesso em 12 Abr. 2024.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.