

**Formação docente na perspectiva da Engenharia Didática de Formação:** uma abordagem cognitiva, epistemológica e didática

**Teacher training from the perspective of Didactic Training Engineering:** a cognitive, epistemological and didactic approach

Rosalide Carvalho de Sousa<sup>1</sup>  
Francisco Régis Vieira Alves<sup>2</sup>  
Daniel Brandão Menezes<sup>3</sup>

**Resumo:**

O objetivo desse trabalho foi compreender aspectos didáticos relacionados ao ensino do conteúdo de Volume de Sólidos, alicerçados na Teoria das Situações Didáticas e na Engenharia Didática de Formação com o amparo do software GeoGebra. A metodologia adotada nessa investigação foi estruturada nas quatro fases da Engenharia Didática Clássica, em consonância com a Engenharia Didática de Formação, a saber: Análise preliminar, Análise *a priori*, Experimentação, Análise *a posteriori* e validação. Aconteceu uma aplicação *on-line*, via *Google Meet*, com alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública no estado do Ceará, Brasil. Verificou-se que o uso da Engenharia Didática de Formação articulada com a Teoria das Situações Didáticas trouxe relevantes contribuições à formação docente e ao ensino de conteúdos geométricos. Enfatiza-se que o uso do GeoGebra possibilitou aos sujeitos realizarem uma transposição do abstrato para o visual, facilitando a formulação da resolução do problema proposto sobre Geometria Espacial.

**Palavras-chave:** Engenharia Didática de Formação; Ensino; Teoria das Situações Didáticas; Formação de professor; GeoGebra.

**Abstract:**

The objective of this work was to understand didactic aspects related to the teaching of the Solid Volume content, based on the Theory of Didactic Situations and Didactic Engineering Training with the support of GeoGebra software. The methodology adopted in this investigation was structured in the four phases of the Classical Didactic Engineering, in consonance with the Didactic Engineering of Training, namely: Preliminary Analysis Preliminary Analysis, a priori Analysis, Experimentation, a posteriori Analysis and validation. An *on-line* application took place, via *Google Meet*, with students from the Undergraduate Mathematics course of a public university in the state of Ceará, Brazil. It was verified that the use of Didactic Engineering of Training articulated with the Theory of Didactical Situations brought relevant contributions to teacher training and the teaching of geometric contents. It is emphasized that the use of GeoGebra allowed the subjects to make a transposition from the abstract to the visual, facilitating the formulation of the resolution of the proposed problem on Spatial Geometry.

**Keywords:** Didactic Engineering Training; Teaching; Theory of Didactic Situations; Teacher Training; GeoGebra.

---

<sup>1</sup> Doutoranda em Ensino, Rede Nordeste de Ensino (RENOEN/IFCE); Professora Efetiva da Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC/CE); Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq); ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8059-1159>; E-mail: [rosalidecarvalho@hotmail.com](mailto:rosalidecarvalho@hotmail.com).

<sup>2</sup> Doutor em Educação com ênfase no ensino de Matemática, Universidade Federal do Ceará (UFC); Professor titular do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE); Bolsista de Produtividade em Pesquisa (CNPq); ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3710-1561>; E-mail: [fregis@ifce.edu.br](mailto:fregis@ifce.edu.br).

<sup>3</sup> Doutor em Educação, Universidade Federal do Ceará (UFC); Docente Pesquisador da Universidade Estadual do Ceará (UECE); ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5930-7969>; E-mail: [brandaomenezes@hotmail.com](mailto:brandaomenezes@hotmail.com).

## Introdução

Em discussões sobre as dificuldades de aprendizagem em Geometria, estudos indicam a necessidade de revisão do currículo de formação de professores de Matemática, apontando a precariedade das licenciaturas como uma possível causa. Corrêa *et al.* (2019) destacam que parte dos problemas no ensino de geometria está relacionada à formação dos professores e seus obstáculos didáticos, que não conectam teoria e prática.

A promoção de uma aprendizagem significativa em Geometria demanda o uso de metodologias e recursos que estimulem o pensamento geométrico dos alunos, sendo as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) cruciais nesse sentido, especialmente para a Geometria Espacial. De acordo com Sousa, Azevedo e Alves. (2022, p. 56), o uso de tecnologia em sala de aula “pode proporcionar, além de mudanças técnicas, transformações comportamentais e sociais, configurando-se em um recurso com grande potencial para diversificar a prática de ensino”, em consenso com às orientações dos documentos oficiais que norteiam o currículo escolar.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ressalta que o estudo da geometria possibilita ao aluno identificar e estabelecer pontos de referência que promovam a localização e o deslocamento de objetos, “construam representações de espaços conhecidos e estimem distâncias, usando como suporte, mapas em papel ou/e recursos tecnológicos como *tablets*, *smartphone* e outras ferramentas que possam auxiliar a representação dessas situações” (Brasil, 2018, p. 272).

Diante disso, ressalta-se a relevância de um estudo sobre o ensino de Volume de Sólidos Geométricos, considerando as limitações da abordagem pedagógica tradicional. Isso levanta a questão: o uso de recursos didáticos na formação inicial de professores pode melhorar o ensino dessa disciplina? Assim, traz-se um recorte de uma pesquisa de mestrado, que objetivou compreender aspectos didáticos relativos ao ensino do conceito de volume, alicerçados na Teoria das Situações Didáticas (TSD) e na Engenharia Didática de Formação (EDF), com arrimo do *software* GeoGebra<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup> Este texto é um recorte de uma pesquisa de mestrado intitulada “Engenharia Didática de Formação: uma aplicação do GeoGebra com os alunos da Universidade Estadual Vale do Acaraú no ensino do conceito de volume”, realizada com alunos do curso de Licenciatura em Matemática no município de Sobral, estado do Ceará, aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), Instituição Coparticipante da investigação, conforme CAAE 29216619.6.3001.5053. A pesquisa está vinculada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), Instituição Proponente, aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos, conforme CAAE 29216619.6.0000.5589.

A metodologia de pesquisa adotada foi a Engenharia Didática (ED), voltada para a Engenharia Didática de Formação (EDF), na perspectiva de Perrín-Glorian (2009) e Tempier (2014), por se tratar de um estudo relacionado à formação de professores. A investigação foi fundamentada na Teoria das Situações Didáticas e modelada pelo *software* GeoGebra. A escolha da EDF foi devido ao público-alvo, professores em formação inicial, visando a construção de um recurso didático para o ensino do tema.

É importante salientar alguns pressupostos em relação às duas engenharias. Segundo Sousa e Alves (2022), enquanto na ED o *design* de investigação possibilita uma intervenção controlada dos fenômenos de ensino e aprendizagem, com maior ênfase nas ações realizadas pelos alunos, na EDF a atenção se volta para conjecturar, modelizar e entender a função do professor, no que tange ao processo de ensino e do sistema educacional.

O público-alvo desse estudo foi um grupo de 10 licenciandos em Matemática, da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), no Brasil. Dado o cenário da pandemia Covid-19, seu desenvolvimento ocorreu de forma remota via *Google Meet*. Uma situação didática foi elaborada a partir de um problema do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) acerca do referido tema. Adotou-se este exame por apresentar uma quantidade expressiva de questões sobre o tema, além de ser uma avaliação de larga escala, que avalia o desempenho do aluno ao final do Ensino Médio e direciona as políticas públicas para esse segmento.

## **1. Referencial teórico**

### **1.1 O ensino de sólidos geométricos**

Os sólidos geométricos são parte do currículo da Educação Básica no Brasil e têm grande importância na escola. No entanto, na prática docente, por vezes são abordados superficialmente, com fórmulas e exercícios mecânicos, sem significado para os alunos. Costa, Bermejo e Moraes (2009) destacam que essa abordagem limitada impede a compreensão dos conceitos, a identificação de elementos e propriedades dos sólidos geométricos, e a construção de relações entre eles, prejudicando a aprendizagem dos estudantes nessa área.

Isto nos conduz à reflexão sobre a formação dos professores de matemática, pois, segundo Pavanello (2001, p. 183), o docente ao ministrar sua aula precisa “[...] trabalhar relações existentes entre figuras, fato esse que não auxilia o aluno a progredir para um nível superior de compreensão de conceitos”. Santos e Oliveira (2018) destacam a importância de iniciar o ensino de Geometria Euclidiana com a exploração espacial pelos alunos, utilizando seus conhecimentos práticos para compreender figuras em terceira dimensão.

Um dos motivos que permeiam as lacunas da aprendizagem de Geometria Espacial é a deficiência dos professores no ensino do tema. De acordo com Barbosa e Cortela (2018, p. 423), “o processo de escolarização que esses sujeitos vivenciaram, deixaram lacunas referentes aos conteúdos geométricos”, que influenciam sua prática. Isto evidencia lacunas na formação nessa área, demandando, portanto, mudanças na formação inicial e continuada, no intuito de fortalecer a prática do docente no ensino deste tema e da disciplina de Matemática de forma global.

O ensino inicial de Geometria deve permitir que os alunos explorem objetos em duas e três dimensões, relacionando-os ao mundo real. Lorenzato (1995) destaca a importância de criar condições para que as crianças experimentem objetos e imagens, incentivando-as a visualizar e comparar formas, desenvolvendo assim, o senso espacial.

Em termos gerais, o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Espacial enfrenta várias lacunas decorrentes da falta de atenção dedicada a este campo. Estas lacunas incluem: (i) a carência de atividades envolvendo Geometria de posição e Desenho Geométrico; (ii) a desvalorização das representações bidimensionais e tridimensionais das figuras geométricas por parte dos professores; (iii) a abordagem mecânica dos conceitos geométricos; (iv) a negligência no ensino da Geometria Espacial Métrica; e (v) a falta de exploração da percepção, o que dificulta a formação de representações mentais dos objetos (Costa; Bermejo; Moraes, 2009).

O ensino de Geometria Espacial permanece pouco alterado, o que resulta em compreensão limitada de seus conceitos. Mudanças são necessárias, especialmente na formação inicial, incluindo a integração de conceitos matemáticos em outras disciplinas para facilitar sua compreensão no contexto cotidiano. Essa abordagem visa promover uma postura reflexiva nos futuros educadores, capacitando-os a desenvolver habilidades essenciais para sua profissão.

### **1.3 A Teoria das Situações Didáticas (TSD)**

A Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1986) é um modelo teórico para o ensino de Matemática, caracterizado por uma série de situações didáticas que podem ser aplicadas em sala de aula, modificando um ou vários comportamentos do aluno. Assim, “o objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber” (Almouloud, 2007, p. 31-32).

A mediação do professor é crucial na dinâmica da relação de ensino, ao escolher e apresentar problemas, e estimular os alunos a desenvolvê-los, ampliando seu repertório matemático. Brousseau (2008) destaca que o aprendizado do aluno parte da interação e adaptação a um meio (*milieu*), mesmo que este não tenha sido originalmente concebido para

fins didáticos. O *milieu* deve ser planejado pelo docente visando desafiar os estudantes e promover a aprendizagem, a partir de estímulos cognitivos e de seus conhecimentos prévios.

Brousseau (1986) define uma situação didática como um conjunto de relações explícitas ou implicitamente estabelecidas por um grupo de alunos, em um *milieu* com recursos, objetos e uma instituição educativa (o professor), propiciando aos discentes um saber organizado ou em construção, reproduzindo, pelo menos em parte, aspectos de um trabalho científico.

No ambiente de aprendizagem, surgem variáveis sobre as quais o professor não tem controle, identificadas como situação didática e situação a-didática. A primeira, segundo Almouloud (2007), envolve escolhas de variáveis didáticas para promover mudanças na resolução de problemas. Na segunda, o aluno produz conhecimento por conta própria, mas o professor orienta a direção da aprendizagem, fornecendo estratégias para resolver problemas.

Assim, foram utilizadas as fases ou dialéticas da TSD (ação, formulação, validação e institucionalização) para analisar as relações entre as situações de ensino e o saber matemático, segundo os pressupostos de Brousseau (1986), e brevemente descritas como:

(a) *situação de ação*: momento em que os alunos têm o primeiro contato com o problema, estabelecendo estratégias, simulações e reflexões, voltadas às ações necessárias para a sua solução;

(b) *situação de formulação*: etapa de diálogo entre os pares e o meio e de troca de ideias e a criação de estratégias de resolução, por meio de linguagem escrita ou oral, sem rigor matemático formal;

(c) *situação de validação*: momento em que os alunos buscam validar o conhecimento, utilizando uma linguagem matemática formal e mecanismos de demonstrações e/ou provas;

(d) *situação de institucionalização*: ocorre a retomada do processo de ensino pelo professor, sintetizando todas as estratégias e informações estabelecidas pelos alunos, normatizando um único modelo de solução do conceito matemático apresentado no problema.

As etapas da TSD fundamentaram a concepção da situação didática desenvolvida nessa investigação, validando as estratégias de resolução apontadas pelos sujeitos envolvidos. No tópico seguinte, discorre-se sobre a metodologia de pesquisa da Engenharia Didática de Formação (EDF), em complementariedade com Engenharia Didática Clássica (ED), que estruturaram esse estudo.

#### 1.4 Engenharia Didática de Formação (EDF)

Conforme Perrín-Glorian (2009), a EDF almeja desenvolver recursos ou objetos educativos para a Educação Básica ou Formação Docente, sendo estabelecida a partir de vários níveis de construção, como as situações *in loco*, onde o professor precisa descrever os procedimentos empregados ao intermediar o ensino e evidenciar seu papel de mediador da aprendizagem. Com efeito, é necessário planejar e prever obstáculos que podem surgir no desenvolvimento das situações didáticas, visando facilitar o processo de construção do saber matemático pelo estudante.

Corroborando com o trecho anterior, Alves (2018) enfatiza que a EDF foca na função do professor, alertando para as atribuições dos docentes ao planejar e elaborar situações para a transposição de conteúdos, de modo a suscitar a compreensão matemática do aluno.

Assim, a EDF, nominada também por Engenharia Didática de Segunda Geração, baseia-se na Engenharia Didática Clássica, partindo da ampliação de seu questionamento e objetivo de pesquisa. Almouloud (2011) explica que a EDF aproveita o que foi concebido na primeira engenharia, moldando-a às características e necessidades do professor. Em conformidade, na concepção de Perrin-Glorian e Bellemain (2019), a EDF estuda a adaptação das situações produzidas às condições de ensino e às necessidades do professor, implicando em uma análise mais aprofundada acerca de sua implementação em sala de aula e de seu gerenciamento.

A estrutura metodológica segue o modelo da ED Clássica, como etapas de: (i) Análises prévias ou preliminares; (ii) Concepção e análise *a priori*; (iii) Experimentação; e (iv) Análise *a posteriori* e validação. Na fase inicial desta pesquisa, foi realizada uma investigação sobre o ensino do tema, a aprendizagem dos alunos e suas dificuldades, subsidiando o docente/pesquisador com conhecimento do assunto para planejar e executar um recurso didático que aborde as dificuldades identificadas.

As situações didáticas agem sob o comando de variáveis didáticas determinadas pelo pesquisador, sendo essa uma característica da segunda fase da ED, a análise *a priori*. Tais variáveis podem ser identificadas como microdidáticas ou macrodidáticas (Artigue, 1995). As *variáveis macrodidáticas* ou *globais* referem-se à organização geral da engenharia, enquanto as *microdidáticas* ou *locais* discorrem sobre a organização da sessão didática. Esta última foi adotada para esta pesquisa, no planejamento dos encontros e estruturação da situação didática.

Na terceira etapa, a Experimentação, ocorreu a aplicação da situação didática elaborada *a priori* com os participantes, bem como a coleta de dados, por meio de fotografias, gravações de áudio e vídeo e materiais escritos, processados e analisados na última etapa da ED.

Por fim, na análise *a posteriori* e validação, a análise dos dados coletados foi realizada bem como o confronto com as hipóteses previamente estabelecidas na análise *a priori*, verificando a validação (ou não) do dispositivo desenvolvido, conforme Artigue (1995).

Na sessão seguinte, apresenta-se o percurso metodológico que fundamentou esta pesquisa, bem como a situação didática e os resultados provenientes de sua análise de dados.

## 2. Metodologia

A metodologia adotada foi a Engenharia Didática (ED), em conformidade com os princípios da EDF, e envolveu as suas quatro fases. A seguir, detalha-se como cada etapa foi explorada e integrada, fornecendo o arcabouço estrutural que fundamentou o desenvolvimento e a consolidação deste estudo.

### 2.1 Análise preliminar

Esta análise preliminar teve o intuito de identificar na literatura problemas inerentes ao ensino do objeto matemático dessa investigação. Trazemos referenciais como Douady e Perrin-Glorian (1989), Costa, Bermejo e Moraes. (2009), Figueiredo, Bellemain e Teles. (2014), Awila (2017), Vuelma, Garcia e Trevisan (2011), entre outros. Estas obras preconizam a aquisição de saberes de grandezas geométricas e volume de sólidos, tanto na formação docente quanto na aprendizagem dos alunos da Educação Básica.

Também foi realizada uma análise dos livros didáticos adotados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), bem como da matriz de referência do ENEM, verificando como o conteúdo de sólidos geométricos é tratado e avaliando a maneira como tais conceitos são abordados nas provas do ENEM. Foram selecionados 02 (dois) livros didáticos e 01 (uma) matriz de referência, conforme descrito na Quadro 1:

**QUADRO 1** – Livros e matriz de referência selecionados para análise

Livro/Matriz de Referência	Autores	Ano	Volume	Editora
Matemática Contexto & Aplicações	Luiz Roberto Dante	2016	3	Ática
Matemática Ciências e Aplicações	Gelson Iezzi; Osvaldo Dolce; David Degenszajn; Roberto Périco; Nilze de Almeida	2017	2	Saraiva
Matriz do ENEM	Brasil	2009	-	-

**Fonte:** Elaborado pelos autores (2023).

Estes livros foram selecionados por tratar-se de obras adotadas por escolas do Ensino Médio e por serem parte do acervo apresentado pelo PNLD e trazem linguagem simples, com exercícios tradicionais. No entanto, buscam desenvolver a reflexão a partir de atividades cooperativas, além de apresentar (de modo sugestivo) a utilização de recursos tecnológicos como planilhas eletrônicas, calculadoras, *softwares* de geometria dinâmica entre outros.

A seguir, apresenta-se a descrição de cada obra, no tocante ao ensino de Volumes.

### 2.1.1 Primeiro livro: Matemática Contexto & Aplicações

A obra possui um *layout* dinâmico e colorido, apresentando no início de cada capítulo imagens e objetos que representam zonas rurais e urbanas, seguidos de uma breve descrição do conteúdo matemático tratado na referida divisão, propiciando ao estudante a leitura, a análise e a reflexão do tema contemplado em cada unidade. O conteúdo de Corpos Redondos é apresentado no volume 3 da coleção.

O livro apresenta uma demonstração do Volume do Cilindro, iniciando com uma comparação entre o Cilindro e o Paralelepípedo Retângulo no plano horizontal, usando o Princípio de Cavalieri para relacionar seus volumes. Ambos têm alturas e áreas de base iguais, resultando em volumes iguais. Em seguida, é introduzida a fórmula para calcular o volume do Cilindro, comparada com a fórmula para o volume do prisma. O livro conclui com um texto sobre a evolução do conhecimento geométrico, desde os gregos.

No que tange ao aspecto didático-metodológico, a sequência mantém-se: demonstrações – exercícios resolvidos – exercícios de fixação, com questões que evoluem em nível de complexidade, com um número pequeno de questões contextualizadas. Os conceitos são exibidos de forma detalhada, contextualizando cada tópico e apresentando a dedução e/ou demonstração das fórmulas. É importante ressaltar que, embora o autor declare em nota de edição que o acervo traz problemas contextualizados, estes não aparecem em toda a extensão do livro didático, somente em algumas situações, das quais se destacam as que se referem ao ENEM.

Nesse exemplar, não há menção ao uso de recursos tecnológicos no ensino de Geometria Espacial. Apresenta-se o *software* GeoGebra como uma ferramenta para auxiliar o professor de matemática no planejamento e na execução do ensino de Geometria. Ele oferece um modelo didático-pedagógico que permite aos alunos manipular, modificar, construir e visualizar objetos, promovendo uma abordagem dinâmica da geometria em sala de aula.

### 2.1.2 Segundo livro: Matemática Ciências e Aplicações

Este livro do PNLD para o Ensino Médio (2018-2020) tem um layout dinâmico e linguagem acessível. Os autores conectam situações cotidianas à história da Matemática, contextualizando a evolução na resolução de problemas. Eles detalham o raciocínio geométrico até a dedução algébrica das fórmulas.

Para finalizar, traz-se um exemplo, demonstrando como empregar a fórmula do Volume da Esfera para solucionar um problema. Convém salientar que, mesmo com a exibição geométrica dos objetos e a explicação detalhada, é difícil para o aluno abstrair, visualizar e compreender os conceitos implícitos em imagens estáticas. Desse modo, sugere-se trabalhar esse conteúdo através do *software* GeoGebra, pois essa é uma ferramenta tecnológica que propicia ao estudante movimentar e visualizar o sólido em terceira dimensão, permitindo uma maior compreensão do assunto.

No que se refere à abordagem didático-metodológica, ela segue a mesma sequência do primeiro livro: demonstrações – exercícios resolvidos – exercícios propostos, distribuídas por nível de dificuldades, indo das mais fáceis até as mais complexas. O ponto positivo desse exemplar, é que ele traz uma quantidade expressiva de problemas contextualizados, o que aproxima o tema trabalhado de situações reais, proporcionando uma diversidade de situações-problema que aproximam a matemática da sala de aula ao cotidiano do aluno.

Ademais, a obra ainda apresenta a seção “Troque ideias”, com sugestões de exercícios para serem resolvidas em grupo e, a seção “Aplicações” com textos que aplicam o saber matemático em outros campos do conhecimento, como por exemplo, interligando a Matemática com a Física ou a Matemática e a Economia, permitindo o aprofundamento de alguns conceitos e a construção de outros.

Em alguns conceitos, os autores fazem sugestões para o uso de ferramentas tecnológicas como mecanismos de auxílio ao professor no ensino do conteúdo. Como no capítulo sobre Trigonometria na Circunferência, sugere-se o uso do GeoGebra para confecção de gráficos das razões trigonométricas; porém no capítulo sobre Geometria Espacial, não há menção ao uso de recursos tecnológicos. Sendo assim, ressalta-se o uso do *software* GeoGebra para o ensino do conteúdo de Volume, que pode ser empregado tanto para introduzir o tema quanto para ajudar os discentes na resolução da atividade, em um ambiente da geometria dinâmica.

### **2.1.3 Matriz de referência do ENEM**

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é um programa do governo federal, criado pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) com o intuito de avaliar o desempenho do aluno ao final do Ensino Médio, além de oportunizar o ingresso no ensino superior, tendo em vista que seus resultados são utilizados como critério de seleção por muitas universidades públicas e privadas. Essa avaliação ainda permite ao poder público, direcionar recursos para o desenvolvimento da educação.

Para a disciplina de Matemática, a matriz de referência do ENEM contempla um conjunto de competências e habilidades que o discente deve adquirir sobre um conteúdo específico, em cada série do Ensino Médio, a serem avaliadas via teste padronizado.

Para a realização da referida prova, o conteúdo de Volume de Sólidos surge interligado ao tópico de Geometria Espacial. Assim, a matriz preconiza que os alunos tenham condições de interpretar a localização de objetos no espaço tridimensional e sua representação bidimensional, identifiquem características de figuras planas e espaciais, resolvam situações-problema do dia a dia que envolvam conceitos geométricos de espaço e forma.

A Geometria Espacial dessa matriz, engloba problemas contextualizados com situações da realidade, surgindo em questões que vão desde o reconhecimento de sólidos até suas propriedades e elementos. São comumente apresentadas em problemas que envolvem área e volume de sólidos geométricos e suas respectivas planificações. Desse modo, abordou-se nessa investigação o conceito de Volume do Cilindro e da Esfera em uma situação didática de problemas do ENEM.

### **2.2 Análise a priori**

Nessa etapa, selecionou-se uma questão do ENEM, contemplando o conceito de Volume do Cilindro e da Esfera, estruturada nas quatro etapas de TSD e modelada no GeoGebra, por tratar-se de um *software* matemático que possibilita ao estudante movimentar figuras e objetos, realizando simulações que permitem melhorar a compreensão dos conceitos matemáticos implícitos no enunciado do problema, além de fornecer ao docente um recurso didático-pedagógico que pode auxiliá-lo a planejar e executar suas práticas de sala de aula.

Nessa fase, procede-se às escolhas das variáveis globais e locais que serão mais bem detalhadas nos próximos tópicos. No caso dessa investigação, utilizaram-se as variáveis locais por ter como público-alvo um número pequeno de participantes e não haver comparação dos

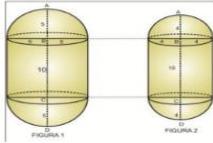
resultados com dados externos. O problema proposto foi selecionado da prova do ENEM do ano de 2014 (Figura 1) e será mais bem delineada nos resultados e discussões.

**FIGURA 1** – Questão de volume do Enem caderno azul - adaptada

Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pilulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pilulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.

Um medicamento é produzido em pilulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm, e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pilulas.

Use 3,14 como valor aproximado para  $\pi$ .



A redução do volume da pilula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será aproximadamente

(A) 168.  
(B) 304.  
(C) 306.  
(D) 378.  
(E) 538.

**Fonte:** Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, (2014).

## 2.3 Experimentação

Na terceira fase da ED, a experimentação foi conduzida com 10 alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú, em Sobral, Ceará, Brasil. Devido à pandemia da Covid-19, ocorreu de forma virtual pelo *Google Meet*, com duração de 120 minutos. Os alunos receberam o problema do ENEM em formato PDF pelo WhatsApp, juntamente com o arquivo da questão no GeoGebra. Links e *QR-Codes* foram fornecidos para garantir o acesso seguro aos materiais necessários.

Os futuros docentes foram orientados a formarem 03(três) grupos, divididos do seguinte modo: 02 (dois) grupos com 03 (três) participantes e 01 (um), com 04 (quatro) membros. Por tratar-se de um recorte de dissertação, com grande número de dados, selecionaram-se os resultados de apenas 01 (uma) equipe para apresentar. As equipes criaram subgrupos, no *WhatsApp*, para estabelecer as trocas de informações e formularem as estratégias de resolução do problema do ENEM. Convém ressaltar que, por conta do isolamento social imposto pela pandemia da Covid-19, as etapas da TSD foram adaptadas para a modalidade remota, de maneira a garantir a realização de todas as fases.

Os dados foram coletados através de *screenshots* das conversas no *WhatsApp*, fotos ou vídeos das resoluções no caderno e manipulação no GeoGebra, além de outras anotações dos

participantes. Cada equipe designou um representante para compartilhar as resoluções. Após o encontro, todos os registros foram enviados aos pesquisadores para análise. Esse processo reforçou o contrato didático estabelecido.

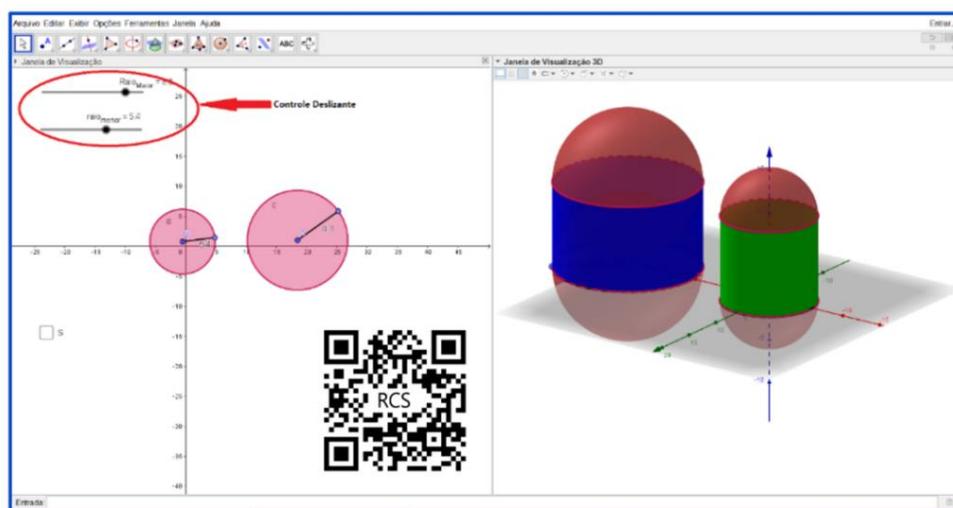
Na etapa final, análise *a posteriori* e validação interna, característica da ED, procedeu-se à análise dos dados coletados, resultado da confrontação com as hipóteses antevistas na análise *a priori*. No próximo tópico, apresentam-se a situação didática do ENEM aplicada nesse estudo e os resultados da análise concretizada na etapa final da Engenharia Didática.

### 3. Resultados e discussão

Na fase experimental, a pesquisa buscou responder à pergunta principal e validar os resultados na análise posterior. Variáveis microdidáticas foram aplicadas em uma situação didática com um problema do ENEM no GeoGebra. Isso criou um recurso didático para os licenciandos resolverem o problema proposto. Os resultados vêm de uma pesquisa de mestrado sobre questões do ENEM sobre Volume de Sólidos Geométricos no ensino de Matemática e na formação de professores, com base em um problema de 2014 envolvendo volumes de esfera e cilindro reto.

Durante a realização do encontro, os pesquisadores atribuíram um tempo para que os participantes mobilizassem os conhecimentos matemáticos subtraídos da leitura da questão. Os licenciandos foram orientados a manusearem o GeoGebra para criarem estratégias de resolução, conforme ilustrado na Figura 2. Para que o leitor possa acompanhar a dinâmica da questão, disponibiliza-se na imagem o *QR Code* de acesso ao modelo criado no software GeoGebra.

**FIGURA 2** – Visualização do problema do ENEM no GeoGebra



**Fonte:** Elaborado pelos autores (2019).

Assim, os participantes procederam à leitura do problema, manipularam o modelo criado no GeoGebra e iniciaram os primeiros esboços de solução da questão, assinalando, desse modo, a primeira fase da Teoria das Situações Didáticas (TSD), a dialética da ação. Nessa fase, o “professor apresenta o desafio para os alunos, que por sua vez, devem encontrar-se ativamente empenhados na busca pela solução, selecionando e realizando ações de natureza operacional” (Mororó; Alves; Fontenele, 2022, p. 7). Ressalta-se que nessa primeira etapa não houve nenhum dano em relação à aplicação presencial, uma vez que os licenciandos tiveram acesso aos materiais necessários para realizarem a tarefa proposta.

Dando prosseguimento ao experimento, os futuros professores iniciam as conversas em seu grupo de *WhatsApp* (Figura 3), trocando informações na tentativa de delinear possíveis soluções para o problema, de acordo com o que fora previsto na análise *a priori*.

FIGURA 3 – Dialética da formulação do grupo 2



Fonte: Acervo da pesquisa (2020).

Diante do exposto, verifica-se que os professores em formação percebem que os volumes dos objetos são os somatórios do volume da esfera com o volume do cilindro e, que basta subtrair o volume da pílula de maior raio pelo volume da que possui raio menor, para encontrar a solução do problema.

Assim, os futuros docentes procedem às trocas de mensagens via celular, trocando informações, realizando procedimentos, formulando seus modelos matemáticos para resolver o problema. Convém ressaltar que os licenciandos relataram a utilização da construção do GeoGebra ora para tentar estabelecer uma solução, mobilizando seus conhecimentos epistêmicos e pragmáticos que possibilitassem instituir um modelo algébrico de resolução, ora para comprovação das respostas por eles atribuídas. Com relação à aplicação presencial, percebeu-se que nessa segunda etapa da TSD, não foi possível instituir um diálogo mais efetivo entre os membros do grupo, pois de acordo com os relatos, eles tiveram muitos problemas com a internet, dificultando a troca de mensagens entre eles.

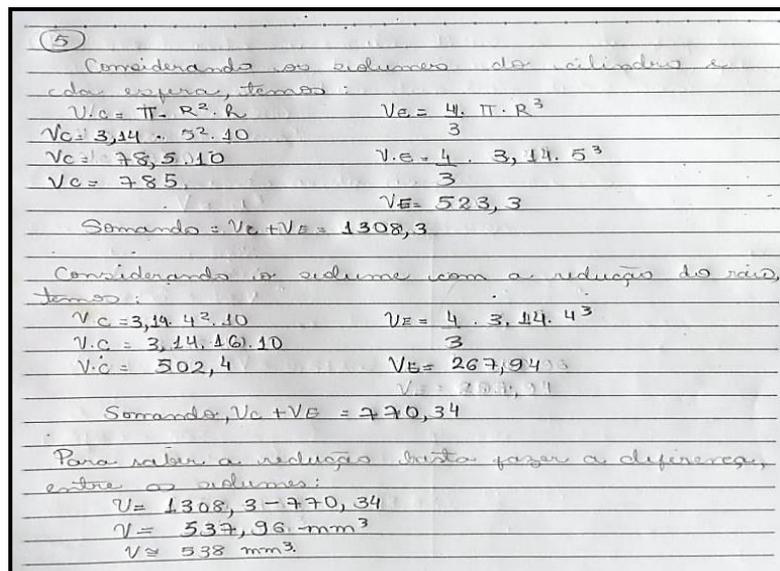
Ainda sobre a dialética da formulação, é importante destacar que os pesquisadores consideram que nessa fase o contato visual entre os participantes e a troca de informações, no momento de realizarem as movimentações no GeoGebra e da formulação do modelo algébrico de solução, é um fator importante no processo de construção do conhecimento matemático e, que a modalidade remota não favorece, pois não é possível estabelecer um diálogo que promova uma maior interação entre os participantes.

Em seguida, no momento de validação, foi estabelecido que um representante do grupo deveria expor as estratégias utilizadas para resolver a situação, a todos os presentes. Portanto, exibe-se a transcrição das mensagens de áudio, no momento da validação. Para garantir o anonimato do participante da pesquisa, aqui ele será nomeado por P6.

P6: De início a gente vai precisar saber o volume do comprimido sem a redução. Então, para isso eu tirei o volume do cilindro e da esfera. Sabemos que o volume do cilindro  $\pi \cdot r^2 \cdot h$ . Lá na questão ele diz que é para usar  $\pi = 3,14$ . Assim, temos  $3,14 \cdot 5^2 \cdot 10$ . Então, realizando a operação eu encontro o volume do cilindro em  $785\text{mm}^3$ . Com relação ao volume da esfera eu tenho  $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ , substituindo os valores e resolvendo, eu encontro o volume que é  $523,3\text{mm}^3$ . Para que eu saiba qual é o valor do comprimento todo eu faço a soma dos dois e, encontro  $1.308,3\text{mm}^3$ . Depois para que eu encontre o volume do outro comprimido, depois da redução, eu vou utilizar o raio sendo 4, assim fazendo o volume tanto do cilindro, quanto da esfera eu encontro 502,4 para o cilindro e, para a esfera 267,94. Realizando a soma, eu tenho  $770,34\text{mm}^3$ . Para eu saber a redução, basta eu fazer a diferença entre os dois, que vai ser a diferença do maior menos a do menor, por fim, eu encontro  $537,96\text{mm}^3$  que vai ser aproximadamente  $538\text{mm}^3$ .

Pelo exposto, verifica-se que os licenciandos realizaram o cálculo no ambiente lápis e papel para instituir uma resolução de escrita matemática para a situação didática proposta, conforme fora visto na etapa da análise *a priori* (Figura 4).

**FIGURA 4 – Modelização algébrica da solução do problema**



(5)

Considerando os volumes da cilindro e da esfera, temos:

$$V_C = \pi \cdot R^2 \cdot h \qquad V_E = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

$$V_C = 3,14 \cdot 5^2 \cdot 10 \qquad V_E = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 5^3$$

$$V_C = 785,0 \qquad V_E = 523,3$$

Somando:  $V_C + V_E = 1308,3$

---

Considerando o cilindro com a redução do raio, temos:

$$V_C = 3,14 \cdot 4^2 \cdot 10 \qquad V_E = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 4^3$$

$$V_C = 502,4 \qquad V_E = 267,94$$

Somando:  $V_C + V_E = 770,34$

Para saber a redução basta fazer a diferença entre os volumes:

$$V = 1308,3 - 770,34$$

$$V = 537,96 \text{ mm}^3$$

$$V \approx 538 \text{ mm}^3$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa (2020).

O grupo apresentou uma solução semelhante a que foi prevista *a priori*, procedendo ao cálculo do volume da esfera e do cilindro da primeira pílula, com raio medindo 5 mm. Em seguida, estabeleceram o volume da segunda pílula, reduzindo o raio para 4 mm. Finalizando, o grupo realizou a diferença entre o volume dos dois objetos para segmentar a solução final da referida situação didática, instituindo como solução  $V = 537,96 \text{ mm}^3$ .

Desse modo, os licenciandos concluíram que a pílula deve ser reduzida em aproximadamente 538 mm. Com relação à utilização da construção no GeoGebra, os participantes relataram que alguns utilizaram o software para validar a resposta encontrada, conforme o relato captado no momento da apresentação do representante do grupo:

P6: Com relação ao GeoGebra eu não utilizei lá pra fazer a resposta, mas eu acho importante a gente dá uma olhada, porque depois que a gente utiliza o GeoGebra é possível ver mesmo, de forma explícita a mudança, a diferença com relação ao uso ou não. Então, eu utilizei o GeoGebra para comparar a resposta que encontrei, com a visualização da figura. Então, é importante a utilização do GeoGebra porque se torna visível e até mais dinâmico mesmo, a apresentação e a socialização com os alunos da sala de aula.

Assim, constatou-se que a manipulação do sólido no software GeoGebra foi utilizada pelos participantes para validar o modelo matemático formulado. Analisando a apresentação desses futuros professores, percebeu-se que eles já possuem algumas habilidades ao explicar a resolução, mostrando um certo cuidado em relacionar os assuntos matemáticos do problema com o modelo proporcionado no *software*, expressando ações que podem ser aplicadas no exercício da docência, contribuindo com sua formação profissional, seguindo os preceitos da

EDF, como se observa no relato acima, em que os licenciandos buscam o recurso tecnológico para confrontar e validar a resolução apresentada. No entanto, é importante destacar que mesmo os participantes apresentando a solução do problema, essa fase sofre uma certa perda na modalidade remota em relação à criticidade e o poder empírico que o diálogo presencial oferece. A tela do computador afasta os participantes, o debate perde o calor e o vínculo entre os sujeitos envolvidos na sessão didática, causando muitas vezes lacunas na aprendizagem do conteúdo pelo aluno, influenciando o processo de apropriação do saber matemático (Sousa; Alves, 2022).

No que se refere à utilização do software GeoGebra, os participantes afirmaram que ele foi importante para comprovação da solução algébrica estabelecida na resolução do problema. Ademais, os participantes consideram um recurso valioso, pois possibilita ao estudante ampliar o campo de visão das figuras geométricas e, com isso, uma maior compreensão das propriedades e teoremas necessários para a resolução de problemas, além de proporcionar um modelo que auxilia o professor no planejamento e na execução de suas práticas docentes.

Em relação à TSD, alguns obstáculos surgiram no decorrer de sua aplicação, haja vista que ela foi criada para ser utilizada presencialmente; no entanto, foi possível visualizar e identificar todas as suas etapas nas ações realizadas pelos investigadores e pelos futuros docentes na aplicação remota que, juntamente com os recursos tecnológicos e o *software* educativo, propiciou um maior protagonismo do estudante na construção dos saberes matemáticos, consolidando, assim, um modelo didático promissor para o ensino e a aprendizagem na educação básica e na formação do professor de matemática.

### **Considerações finais**

Este trabalho é um recorte dos resultados de uma investigação de mestrado que teve como objetivo compreender aspectos didáticos relacionados ao ensino de conceitos de volume, fundamentada na TSD e na EDF e, moldado com o suporte do software GeoGebra, visando desenvolver conhecimentos que proporcionem a transposição de alguns conceitos aos modos operandi de resoluções matemáticas e, a capacidade do professor em formação inicial de planejar e intermediar ações docentes que promovam essa transposição para o cotidiano escolar.

Levando em consideração as experiências dos pesquisadores como docentes da educação básica e ensino superior, observa-se que os discentes apresentam deficiências de aprendizagem dos conceitos trabalhados nessa investigação. No que concerne a revisão de literatura, identificaram-se duas características no ensino de Geometria Espacial: dificuldades

em compreender conteúdos matemáticos que necessitam de capacidade de abstração, em especial aos que se referem ao cálculo de volume de sólidos geométricos e a ausência de atividades práticas que podem ser aplicadas na atividade profissional do futuro docente, em situações de sala de aula.

Quanto ao uso da tecnologia, conclui-se que os recursos utilizados auxiliaram os participantes na percepção, discussão e operações do cálculo do volume do sólido modelado no GeoGebra para estruturar e validar a resolução da situação matemática proposta, ou seja, os licenciandos visualizaram os objetos no software, em terceira dimensão, para comparar o volume dos dois sólidos e, assim, identificar a massa da pílula, após a redução do raio, apoiando-se nela para identificar e compreender os conceitos matemáticos presentes no enunciado do problema. O uso do recurso promoveu um meio de visualizar o objeto com sua dimensão inicial e final, mostrando claramente que ao modificar o raio, o volume reduziu, facilitando, portanto, a compreensão do conceito de volume do cilindro e da esfera.

Ressalta-se, ainda, que os recursos tecnológicos adotados foram essenciais para o desenvolvimento e aplicação dessa investigação, como também para conceber um recurso didático que possibilita ao aluno um maior protagonismo na apropriação dos saberes matemáticos, uma vez que nos livros didáticos analisados, identificou-se pouca ou quase nenhuma sugestão metodológica para a abordagem dos conteúdos por meio da utilização da tecnologia, salientando a relevância do uso do *software* GeoGebra no ensino de Volume de Sólidos Geométricos, podendo facilmente estender-se a outros conteúdos matemáticos.

Destaca-se também a relevância de associar a TSD com o auxílio do GeoGebra para estruturar a situação didática, subsidiando o professor com um meio de desenvolver os conteúdos de Geometria Especial pelo emprego de várias linguagens como visual, verbal, textual e geométrica, além de possibilitar prever possíveis comportamentos dos estudantes, em situações de sala de aula, reduzindo, desse modo, as dificuldades cognitivas, epistemológicas e didáticas relativas ao assunto tratado nesse trabalho.

Na condução dessa investigação, buscou-se uma metodologia de pesquisa que promovesse a compreensão tanto dos fenômenos envolvidos no ensino e na aprendizagem de certo conhecimento matemático, no planejamento das práticas pedagógicas e da transposição didática do futuro docente, quanto para analisar os resultados dos dados coletados. Desse modo, desenvolveram-se as quatro etapas clássicas da ED, em caráter de complementariedade com a EDF que investiga a atividade prática do professor. Assim, tem-se a compreensão que a ED, em conjunto com a EDF, subsidiam o professor na elaboração de um plano de ensino que

ocasiona a observação, formação, construção e análise de situações didáticas que podem contribuir com suas práticas docentes.

Acredita-se que a situação didática proposta e os recursos tecnológicos adotados, durante o planejamento e execução do experimento, promoveram aos futuros professores, uma alternativa para compreender, organizar e elaborar as noções intuitivas do conceito de Volume, despertando, assim, seus saberes epistêmicos e pragmáticos para expressar os teoremas empregados na solução do problema. Desse modo, com a participação e a realização da situação didática pelos licenciandos, conclui-se que o objetivo dessa pesquisa foi alcançado.

É importante destacar também que, durante a aplicação do experimento, devido à condição de aplicação remota, surgiram alguns obstáculos. Alguns licenciandos relataram oscilação de sinal da internet, comprometendo a comunicação com o pesquisador e com os outros integrantes da pesquisa, o que dificultou a dialética da formulação, segunda fase da TSD. Outra consideração que convém destacar é que a aplicação remota prejudica uma maior interação entre os participantes, além de diminuir o acompanhamento mais efetivo do investigador, nas ações dos participantes, durante a elaboração do modelo de resolução, necessitando, talvez, adotar outros equipamentos e um contingente maior de pessoas para coleta de dados.

Este trabalho contribui significativamente para a formação docente e o ensino de conceitos geométricos, destacando a importância de metodologias que atendam às necessidades dos professores, melhorando sua prática. A combinação entre a EDF, TSD e o software GeoGebra facilita o ensino da Geometria Espacial através de uma visualização dinâmica, transformando o abstrato em visual, o que ajuda na formulação de hipóteses para resolver problemas. Espera-se que este estudo incentive a reflexão sobre a formação docente, o uso de tecnologias na educação básica e promova a participação ativa dos alunos na aprendizagem matemática.

### **Referências bibliográficas**

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A. PCMA debate Engenharia Didática de Segunda Geração. [Entrevista concedida a] Ana Paula Machado e Laressa Santos. **Jornal da UEM**, Maringá, n. 102, out. 2011.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. da. Engenharia Didática: evolução e diversidade. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p22>

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos números (Generalizado) de Catalan (NGG). **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 2, p. 47-83, 2018.

ARTIGUE, M. Ingenierie Didáctique. In: ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L. (Ed.). **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática**: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y las matemáticas. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. p. 36-61.

AWILA, H. F. de. **Uma análise da contribuição do GeoGebra como recurso interativo para o estudo de áreas e volumes**. 2017. 195 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2017.

BARBOSA, A. P. R.; CORTELA, B. S. C. Formação do PNAIC em Geometria e a trajetória Educacional dos Professores Alfabetizadores. **Bolema**, São Paulo, v. 32, n. 61, p. 419-438, 2018. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a06>

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação do Brasil: Brasília, DF, 2018. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 02 ago. 2022.

BROUSSEAU, G. **Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques** (Thèse de doctorat, Université Bordeaux I). Thèses en ligne (TEL), 1986.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CORRÊA, N. B. de O.; SANTOS, M. L. dos; SANTOS, S. X. dos.; BENITE, C. R. M. A abordagem dos três momentos pedagógicos no ensino de geometria espacial: contribuições de uma sequência didática. **Anais... II Congresso Nacional de Ensino de Ciências e Formação de Professores**, 2019, Catalão. Catalão: CECIFOP, 2019.

COSTA, A. C.; BERMEJO, A. P. B.; MORAES, M. S. F. Análise do Ensino de Geometria Espacial. **Anais... X Congresso Gaúcho de Educação Matemática**, 2009, Ijuí. Ijuí: EGEM, 2009. p. 1-10.

DANTE, L. R. **Matemática**: Contexto & Aplicações. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2016.

FIGUEIREDO, A. P. N. B.; BELLEMAIN, P. M. B.; TELES, R. A. M. Grandeza Volume: um estudo exploratório sobre como os alunos do ensino médio lidam com situações de comparação. **Bolema**, São Paulo, v. 28, n. 5, p. 1172-1192, 2014. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a09>

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática**: Ciências e Aplicações. 9ª ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Provas do ENEM. Ministério da Educação do Brasil, 2010. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 out. 2021.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista – SBEM**, Brasília, n. 4, p. 3-13, 1995.

MORORÓ, F. N. M.; ALVES, F. R. V.; FONTENELE, F. C. F. Didática Profissional (DP) e Teoria das Situações Didáticas (TSD): uma proposta de caracterização da Situação Didática Profissional (SDP). **Papeles**, Bogotá, v. 15, n. 29, p. 100-116, 2022. <https://doi.org/10.54104/papeles.v15n29.1381>

SANTOS, A. O.; OLIVEIRA, G. S. A prática pedagógica em Geometria nos primeiros anos do Ensino Fundamental: construindo significados. **Revista Valore**, Rio de Janeiro, v. 3, n. 1, p. 388-407, 2018.

SOUSA, R. C. de. Engenharia Didática de Formação: uma aplicação do GeoGebra com os alunos da Universidade Estadual Vale do Acaraú no ensino do conceito de volume. 2021. 283 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2021.

SOUSA, R. C.; ALVES, F. R. V. Engenharia Didática de Formação e Teoria das Situações Didáticas no contexto do ensino remoto: uma proposta amparada pelo GeoGebra para o ensino de volume. **Revista Chilena de Educación Matemática**, v. 14, n. 3, p. 118-135, 2022. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i3.103>

SOUSA, R. T.; AZEVEDO, I. F.; ALVES, F. R. V. A gamificação com a plataforma wordwall como estratégia de aprendizagem para o ensino de matemática. **Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias**, v. 18, n. 1, p. 53-66, 2022. <https://doi.org/10.14483/23464712.18027>

PAVANELLO, M. R. Geometria: atuação de professores e aprendizagem nas séries iniciais. **Anais... I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática**, Curitiba, 2001. p. 172-183.

PERRÍN-GLORIAN, M. J. L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formation des enseignants. In: MARGOLINAS, C. *et al.* (org.). **En amont et en aval des ingénieries didactiques, XV<sup>a</sup> École d'Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme)**. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 1, p. 57-78, 2009.

PERRÍN-GLORIAN, M. J.; BELLEMAIN, P. M. B. L'ingénierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maîtres. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, Aracaju, v. 9, n. 1, p. 45-82, 2019.

TEMPIER, F. La numération décimale à l'école primaire: une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource. (Thèse doctoral, Université Paris-Diderot – Paris VII). Thèses en ligne (TEL), 2013.

VUELMA, C. A.; GARCIA, V. C.; TREVISAN, V. Ensino de áreas e volumes: articulação do mundo físico com os objetos geométricos e suas representações. In: GARCIA, V. C. V.; BÚRIGO, E. Z.; BASSO, M. A.; GRAVINA, M. A. (ed.). **Reflexões e pesquisa na formação de professores de matemática**. Porto Alegre: Evangraf UFRGS, 2011. p. 197-288.